

ESTRUTURAS TARIFÁRIAS NOS RAMOS REAIS DA INDÚSTRIA SEGURADORA

uma aplicação ao sector automóvel em Portugal

João Manuel de Sousa Andrade e Silva

Lisboa, Setembro de 1991

Nota prévia:

Este texto constitui uma segunda tiragem da tese de doutoramento apresentada, em Março de 1991, no Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa e defendida em Julho do mesmo ano.

Em relação ao texto inicial, apenas se procedeu a uma ou outra alteração pontual por forma a torná-lo mais claro.

Agradecimentos

Os primeiros agradecimentos dirigem-se naturalmente à Prof^ª Doutora Maria de Lourdes Centeno que não só orientou este projecto de investigação como também soube transmitir o entusiasmo necessário para ultrapassar alguns momentos menos produtivos.

Registo ainda o apoio prestado pelo Instituto Superior de Economia e Gestão ao nível das facilidades de trabalho que me foram concedidas, mas sobretudo pelo ambiente de camaradagem e convívio científico de que me habituei a usufruir. Neste quadro, um agradecimento muito especial é devido ao Dr. Raúl Brás. Também agradeço ao Prof. Doutor Bento Murteira o apoio institucional que prestou nos contactos externos à Escola.

Seria muito injusto não referir o Centro de Informática do ISEG cujo apoio foi inexcedível nas condições de trabalho que me facultou.

Também não quero deixar de mencionar o Instituto Nacional de Investigação Científica que não só me atribuiu uma bolsa de estudo para doutoramento no país como também apoiou a edição desta tese.

No âmbito das instituições externas à Universidade, os meus agradecimentos vão naturalmente para a Companhia de Seguros Bonança EP que forneceu os elementos necessários ao desenvolvimento da aplicação prática, sendo de sublinhar as frutuosas conversas com o director do ramo automóvel, Sr. Luis Silva, e com o Dr. Manuel Lucas bem como a abertura sempre manifestada pelo seu Conselho de Administração, na pessoa do Dr. Espírito Santo.

Também desejo manifestar o meu apreço ao Instituto de Seguros de Portugal, nomeadamente ao seu então presidente, Dr. Silva Almeida, por ter mostrado grande interesse no tema que me propunha tratar e por ter contribuído decisivamente no contacto inicial com a Bonança EP.

Finalmente, os últimos agradecimentos destinam-se a todos os familiares e amigos cujo apoio foi constante e cuja paciência pareceu, por vezes, ilimitada.

A todos muito obrigado!

Índice

Lista de Quadros	vii
Lista de Gráficos	ix
Lista de Figuras	ix
Resumo	xi
Capítulo 1 - Introdução	1
1. Ramo automóvel e sector segurador	4
2. O enquadramento legal do seguro automóvel	9
3. O estudo realizado	12
Capítulo 2 - Prémio e Tarifa	21
1. O conceito de prémio	21
1.1. O prémio como função do risco	23
1.2. O recurso à utilidade esperada	24
2. Objectivos inerentes à construção de tarifas	29
2.1. Discriminação e solidariedade entre segurados	30
2.2. Um exemplo com a distribuição de Poisson mista	33
2.3. Possíveis consequências da não utilização da informação relevante	36
3. Indemnizações e Responsabilidade	38
Capítulo 3 - Introdução às Metodologias de Construção de Tarifas	41
1. Modelização da tarifa	42
2. Abordagem “clássica”	46
2.1. Os factores mensuráveis à priori	48
2.1.1. Alguns métodos para estimação dos parâmetros	49
2.1.2. A selecção de variáveis: O método de Hallin & Ingenbleek ..	53
2.1.3. Os métodos baseados na análise passo a passo	58
2.2. Factores à posteriori	59
3. Uma abordagem pela teoria da credibilidade	60
3.1. Uma abordagem pelos modelos genéricos	61
3.1.1. O modelo de Bühlmann	61
3.1.2. O modelo de Campbell	64
3.2. O modelo hierárquico de Sundt	69
3.3. Uma primeira formulação do método de Norberg	73

Capítulo 4 - Modelos Lineares Generalizados	79
1. Uma apresentação geral	80
1.1. Definição	80
1.2. Estimação dos Parâmetros	82
1.2.1. Estimação do vector β	83
1.2.2. Alguns exemplos	86
1.2.3. Estimação do parâmetro de escala ϕ	87
1.3. Qualidade do ajustamento	88
2. Modelos constituídos apenas por factores	90
2.1. Modelos agregados	91
2.2. Dedução dos estimadores	92
2.3. Equivalência entre estimativas no modelo agregado e no modelo individual	94
2.4. A Qualidade dos Ajustamentos	95
2.4.1. O conceito de erro puro	96
2.4.2. A estimação do parâmetro de escala	99
2.4.3. O recurso à "deviance"	99
2.4.4. Dois exemplos	101
2.5. Alguns aspectos computacionais	103
3. Modelos com distribuição de Poisson	105
3.1. Dedução dos estimadores	106
3.2. Determinação dos pontos iniciais	107
3.2.1. O processo de Ter Berg	108
3.2.2. O caso linear	109
3.2.3. A qualidade das estimativas iniciais	109
3.3. A avaliação da qualidade do ajustamento	111
3.3.1. "Deviance" em termos agregados e quadros ANODEV	113
3.3.2. Duas propostas de novos testes	115
3.3.3. O comportamento dos testes propostos	117
 Capítulo 5 - Sistemas de Bonus	 121
1. O conceito de sistema puro de bonus	123
1.1. Definição	123
1.2. Alguns comentários	124
2. Construção e eficiência dos sistemas de bonus	126
2.1. A abordagem pela elasticidade	126
2.1.1. O critério de Loimaranta	126
2.1.2. O contributo de Lemaire	129
2.2. O modelo de Norberg	131
2.3. Duas extensões ao modelo de Norberg	136

2.3.1. A escala linear	138
2.3.2. A escala geométrica	139
2.3.3. Alguns comentários às novas escalas	140
2.4. As limitações das metodologias propostas	141
3. Ensaio efectuados	142
3.1. Definição dos testes	143
3.2. Principais conclusões	146
4. A "sede" de bonus	160
4.1. O cenário Lemaire	161
4.1.1. A formulação do cenário	162
4.1.2. A solução proposta por Lemaire	164
4.1.3. A obtenção dos limites de retenção	166
4.2. Alguns exemplos	171
4.2.1. Os sistemas com 5 classes	171
4.2.2. A passagem para 15 classes	174
5. Algumas generalizações	175
5.1. Os sistemas de duração variável	175
5.1.1. Formalização do modelo e dedução dos estimadores	175
5.1.2. Um exemplo	177
5.2. Sistemas com penalizações variáveis	179
5.2.1. O modelo	180
5.2.2. A distribuição estrutural	181
5.2.3. As regras de transição	182
5.2.4. Sede de bonus	182
5.2.5. Um exemplo	183
 Capítulo 6 - Principais Estudos Empíricos	 189
1. O caso belga visto por Lemaire	190
1.1. Os elementos disponíveis	191
1.2. As conclusões principais	191
2. Nova tarifa nos Países Baixos	195
2.1. As hipóteses de partida	196
2.2. As conclusões obtidas	197
3. Alguns sistemas de bonus em vigor	200
3.1. Processo de risco e metodologia de análise	200
3.2. Apresentação dos diferentes sistemas de bonus	201
3.3. Análise comparada	201
4. O modelo hierárquico de Sundt	203

Capítulo 7 - Base de Dados	209
1. A organização dos dados iniciais	210
2. Escolha do período a estudar	217
2.1. Escolha de um ano de calendário fixo	218
2.2. Escolha do último ano de vigência de cada apólice	219
2.3. A escolha entre alternativas	220
3. Os tratamentos preliminares	222
3.1. Tratamento da sinistralidade	222
3.2. Codificação das marcas	223
3.3. A selecção da carteira	224
3.3.1. Ano de 1987	225
3.3.2. Ano de 1987	226
 Capítulo 8 Análise em Termos Marginais	 227
1. Como avaliar a sinistralidade em R.C.	228
2. As carteiras de 1987 e 1988	231
3. Os diferentes factores	232
3.1. Tipo de segurado	234
3.2. Idade do segurado	235
3.3. Número de anos com carta de condução	239
3.4. Classe de cilindrada	239
3.5. Idade dos veículos	241
3.6. A posição na escala de bonus em vigor	243
3.7. A marca do veículo	243
3.8. A residência do segurado	245
3.8.1. A situação existente	247
3.8.2. A construção de possíveis variáveis regionais	250
 Capítulo 9 - Primeira Modelização da Estrutura Tarifária	 259
1. Análise da tarifa em vigor	260
1.1. Estimação do modelo base	262
1.2. A qualidade dos ajustamentos	266
1.3. A introdução dos efeitos de interacção	267
1.4. Crítica da tarifa em vigor	270
1.5. Uma formulação baseada nos modelos aditivos	272
2. Alterações nos factores considerados	276
2.1. Características do veículo	276
2.2. Idade do segurado	279
2.3. A divisão regional	282

3. A formulação de uma tarifa alternativa	282
3.1. Uma solução clássica	284
3.2. A definição de sistemas de bonus diferenciados	284
4. Alguns comentários gerais aos resultados	288
 Capítulo 10 - Construção de um Sistema de Bonus Alternativo	 291
1. A situação existente	292
1.1. Eficiência e escalas óptimas	294
1.3. Sinistralidade observada e sinistralidade real	296
2. Metodologias para definir um sistema de bonus	298
2.1. O sistema de bonus como "offset"	301
2.2. Uma solução alternativa	302
3. A construção da carteira simulada	303
4. O estudo da carteira	305
4.1. A escolha de um novo sistema de bonus	306
4.2. A implementação do estudo	306
4.3. Os resultados obtidos	309
4.3.1. Escolha das escalas óptimas	309
4.3.2. Os impactos nos restantes factores	312
4.3.3. Escala linear versus escala geométrica	314
 Capítulo 11 - Prémio de Risco e Tarifa	 319
1. A estrutura do prémio de risco	320
1.1. A estrutura associada ao custo de um sinistro	321
1.1.1. O recurso aos modelos lineares generalizados	322
1.1.2. Análise da carteira	327
1.2. A determinação do perfil do prémio de risco	334
2. A construção da tarifa	336
2.1. A estimação do nível médio de risco	340
2.2. Alguns exemplos	342
3. Transição entre diferentes sistemas tarifários	347
 Conclusões	 349
 Bibliografia	 355

Lista de Quadros

1.1 Estrutura das carteiras por ramos (em %)	6
1.2 As principais seguradoras no ramo automóvel - RC	7
2.1 Situações possíveis	30
2.2 Variação da informação disponível	35
3.1 Frequências de sinistralidade em 1987	64
3.2 Sistema de bonificação - modelo de Bühlmann	65
3.3 Peso a atribuir às várias fontes de informação	69
4.1 Modelo individual	82
4.2 Frequência absoluta do número de ocorrências	112
4.3 "Deviance" com origem na estimação da média	112
4.4 Erro puro em função da média de ocorrências	113
4.5 Resultados da simulação	119
5.1 Número mínimo de classes por sistema de regras de transição	145
5.2 Quadro global dos principais resultados	147
5.3 Evolução da amplitude das escalas	155
5.4 Número de classes por regras de transição	156
5.5 Variação relativa da perda quadrática com a variação das regras de transição	157
5.6 Seleção da classe k	158
5.7 Sede de bonus	172
5.8 Custo médio por sinistro (Regras 1)	173
5.9 Sede de bonus	174
5.10 Escalas de prémios e sistemas de duração variável	178
5.11 Probabilidade de não participação de um sinistro (%)	179
5.12 Sistema de penalizações variadas	187
5.13 Sistemas clássicos de regras de transição	188
6.1 Análise em frequência - <i>Lemaire</i> [1985]	192
6.2 Análise pelos custos - <i>Lemaire</i> [1985]	194
6.3 Países Baixos - Principais resultados	198
6.4 Sistemas de Bonus	202
6.5 As marcas analisadas	206
6.6 Os principais resultados	208
7.1 Tipo de pagamentos	214
7.2 Tipo de riscos	214
7.3 Sinistros de 86 avaliados em fins de 88	216
8.1 Resultados agregados	233
8.2 Natureza dos segurados	234
8.3 Primeira agregação em grupos etários	236
8.4 As frequências médias observadas	237

8.5	Análise pelas tabelas de contingência	238
8.6	Anos de carta	239
8.7	Cilindrada dos veículos	240
8.8	Sistema de bonus em vigor	243
8.9	Freq. de sinistralidade em RC por classes de bonus	244
8.10	Sinistralidade por marcas	246
8.11	Sinistralidade relativa observada nos distritos	248
8.12	Definição das áreas urbanas	255
8.13	Definição das regiões	257
8.14	Sinistralidade relativa nas regiões	258
9.1	Modelo base - Estrutura tarifária em vigor	265
9.2	Ganhos na "deviance" com a introdução das interacções	268
9.3	Modelo com interacções	269
9.4	Estrutura tarifária em vigor - modelo aditivo	273
9.5	Alterações nas características dos veículos	277
9.6	Alterações nas características dos segurados	281
9.7	Introdução de uma variável regional	283
9.8	O modelo global	285
9.9	Efeitos da introdução das interacções na "deviance"	286
9.10	Modelo com sistema de bonus diferenciado	287
10.1	Posição após duas anuidades na carteira	294
10.2	Percentagem de sinistros não declarados	297
10.3	Escala linear versus escala geométrica - carteira global	311
10.4	Estruturas tarifárias - carteira global	313
10.5	Distribuição estacionária e sede de bonus	315
10.6	Variações nos prémios em função do número de participações	318
11.1	Evolução do custo médio por número de participações	329
11.2	Evolução do custo (em log) médio por número de participações	330
11.3	Variação na "deviance" face ao modelo mínimo	332
11.4	Perfil dos custos associados a um sinistro	334
11.5	Perfil do prémio puro de risco	335
11.6	Prémio referente ao segurado padrão para RC	345
11.7	Alguns exemplos de prémios em RC	346

Lista de Gráficos

1.1 Evolução dos resultados no ramo automóvel	7
1.2 Evolução da sinistralidade no ramo automóvel	8
2.1 Variação da informação disponível	35
4.1 Erro puro versus média.....	114
5.1 Comportamento da taxa de desconto face aos ponderadores	145
5.2 Comportamento dos critérios de avaliação	151
5.3 EQM em função de k - Regras de transição nº 2	153
5.4 Eficiência em função de k - Regras de transição nº 2	153
5.5 EQM em função de k - 15 classes - Regras nº 4	159
5.6 Eficiência em função de k - 15 classes - Regras nº 4	159
5.7 Prémios em % do custo médio de uma indemnização	160
8.1 Freq. de sinistralidade em RC em função da idade do segurado.....	235
8.2 Freq. de sinistralidade em RC em função da idade dos veículos.....	241
9.1 Concentração no povoamento - curva de Lorenz.....	264
9.2 Estimativas do modelo aditivo face às do multiplicativo	274
10.1 Eficiência das regras em vigor	295
10.2 Perfil dos prémios a pagar	295
10.3 Comportamento da "deviance" - escala linear	310
10.4 Comportamento da "deviance" - escala geométrica.....	311
10.5 Escalas de prémios no sistema de bonus	316

Lista de Figuras

8.1 Composição da carteira por marcas	245
8.2 Sinistralidade relativa em RC por distrito.....	249
8.3 Dendrograma da análise em "clusters" - Distritos	252
8.4 Comportamento dos concelhos em torno das áreas metropolitanas.....	254
8.5 Dendrograma da análise em "clusters" - Áreas Urbanas	256

Resumo

Após discutir os objectivos inerentes à construção de tarifas diferenciadas, apresentam-se as metodologias de maior divulgação, realçando-se muito particularmente o recurso aos modelos lineares generalizados, campo onde se propõem alguns desenvolvimentos por forma a permitir uma modelização mais adequada para a construção dos factores tarifários.

O estudo dos sistemas de bonus constituiu também preocupação importante, quer no que se refere aos critérios de avaliação da qualidade destes, quer nos métodos que devem fundamentar a elaboração de sistemas optimizados. Neste domínio, propõe-se a criação de sistemas com escala geométrica nos prémios como forma de combinar uma optimização estatística com a elaboração de sistemas que sejam admissíveis em termos de mercado segurador.

A segunda parte do trabalho é constituída por uma aplicação baseada no estudo da carteira de apólices de uma grande seguradora portuguesa, discutindo-se os problemas que se levantam na construção de sistemas tarifários, e propondo-se soluções que tirem partido dos desenvolvimentos propostos na primeira parte do trabalho. Neste ponto fundamentou-se uma metodologia integrada para estimação da tarifa, integrando-se o estudo dos sistemas de bonus e a análise dos factores directamente mensuráveis.

Finalmente, extraem-se algumas conclusões e desenham-se pistas para investigações futuras.

Capítulo 1

Introdução

Sendo as ciências actuariais uma área científica em franca expansão, onde se assistiu nos últimos anos a numerosos desenvolvimentos teóricos bem como ao desenrolar de muitas conferências e simposiums internacionais e até mesmo ao surgimento de novas publicações especializadas, não se pode deixar de estranhar que tão pouco se tenha feito neste domínio em Portugal.

De facto, se a nível da formação e da divulgação algumas iniciativas foram surgindo, procurando tanto quanto possível alertar o sector segurador para as realidades que se vão alterando e sobretudo para as inevitáveis consequências decorrentes do mercado único de 93, já o mesmo não se tem passado a nível da investigação onde, salvo algumas excepções, se tem visto um alheamento quase completo da Universidade.

A constatação desta realidade, sendo válida nos vários campos da actividade seguradora, assume particular gravidade no caso do seguro automóvel de responsabilidade civil, uma vez que se trata de um ramo de particular importância no sector segurador, nomeadamente desde a instituição da sua obrigatoriedade em 1979, que tem vindo a sofrer alterações profundas no seu enquadramento jurídico desde meados dos anos 80, com a sua progressiva liberalização em termos tarifários. Não obstante tal processo ainda não surgiram estudos estatísticos sérios que permitam fundamentar estruturas tarifárias mais equilibradas, recorrendo às metodologias estatísticas mais adequadas e tirando partido dos progressos teóricos que se vêm

a observar.

Neste domínio embora exista um diferencial apreciável entre Portugal e os países mais desenvolvidos, nomeadamente os do norte da Europa (Benelux, Suécia, Noruega e Reino Unido), é de sublinhar que os problemas inerentes à construção de tarifas adequadas nos ramos reais da indústria seguradora ainda não encontrou uma resposta plenamente satisfatória, nem em termos de modelização teórica, nem muito menos em termos práticos, só assim se compreendendo a multiplicidade de trabalhos que continuam a surgir nesta área, com particular ênfase nos sistemas de avaliação à posteriori (bonus/malus no ramo automóvel).

O trabalho que se vai desenvolver encontra-se assim enquadrado pelas duas ideias que se acabaram de expor. Por um lado, contribuir para a discussão teórica sobre as metodologias a aplicar, analisando-se particularmente os modelos lineares generalizados ("Generalized Linear Models"), a construção e avaliação dos sistemas de bonus, bem como a necessidade e possibilidades de integrar estas duas abordagens parciais, aspecto muito pouco tratado na literatura especializada, e, por outro lado, mostrar que, mesmo numa situação como aquela que vigora em Portugal, é possível dar passos significativos em direcção a um sistema tarifário mais justo e eficiente para segurados e seguradoras.

Não se teve porém a pretensão de construir um sistema perfeito, acabado, que responda de forma definitiva a este problema. De facto, nem a discussão sobre as metodologias estatísticas se encontra encerrada nem é possível esquecer que, na construção de tarifas para o sector segurador, sejam estas uniformes ou próprias a cada companhia, a análise estatística apenas representa um dos aspectos a considerar, porventura decisivo, necessitando todavia de ser complementado com reflexões ponderadas noutras áreas por forma a abarcar a complexidade da tarifa.

Trata-se efectivamente de um domínio sensível, por razões várias que dependem em parte do enquadramento jurídico-social no qual se esteja a trabalhar. De facto, numa situação de tarifa uniforme o seu impacto principal resulta de ser um seguro com carácter obrigatório, cujos efeitos se fazem sentir na generalidade da população podendo servir, embora dentro de certos limites, como instrumento de política económica quando conjugado com a política fiscal para o sector. Para limi-

tar estas tentações por parte da autoridade central, existem mecanismos curiosos nalguns países, podendo referir-se o caso Suíço onde as variações são determinadas por uma comissão de peritos designados paritariamente por seguradoras e representantes das associações de consumidores e completados por alguns especialistas considerados neutrais.

Numa situação liberalizada, como aquela que juridicamente vigora em Portugal, os impactos em termos de mercado originam consequências directas nas companhias, estando a definição da tarifa subordinada às grandes linhas estratégicas da empresa muito embora não seja possível manter valores abaixo dos níveis de segurança por muito tempo ¹. De qualquer forma, em Portugal como nos restantes países, o sector segurador actua num quadro financeiro bastante rigoroso e controlado por forma a evitar situações de ruptura.

Para o desenvolvimento deste trabalho estabeleceram-se contactos com o Instituto de Seguros de Portugal com vista a enquadrar a obtenção da informação necessária à elaboração de um estudo que, não esquecendo a sua vocação principal de âmbito académico, pudesse também servir de suporte teórico a outras abordagens com finalidades bastante mais práticas.

Tendo em conta a situação existente, apontou-se para o tratamento da carteira referente a uma seguradora muito importante no ramo ², a Bonança EP, que mostrou disponibilidade para fornecer os elementos necessários à construção da base de dados que fundamenta o trabalho prático que se irá desenvolver. O facto de se tratar de uma empresa com peso significativo no ramo permite supor que as conclusões tiradas sejam generalizáveis ao conjunto do mercado, muito embora se tenha de sublinhar que se deverá sempre encarar as generalizações com bastante precaução uma vez que podem perfeitamente existir enviesamentos sistemáticos na carteira, fruto da política seguida em termos do departamento de produção da seguradora (implantação regional, tendência para captar riscos com certas características, ...).

¹A este propósito, veja-se por exemplo *Benjamin* [1977], *Ratcliff* [1976] ou ainda *Coutts* [1984].

²Em termos de ramo automóvel tratava-se da empresa líder com um peso de cerca de 14% do mercado (dados de 1988), aspectos que serão desenvolvidos na secção seguinte.

Não estando em causa, como já se referiu, a construção de uma tarifa como produto a implementar em termos de mercado, mas sim a discussão de metodologias e a exemplificação da sua aplicabilidade, apenas se irão estudar os veículos ligeiros de passageiros, classe que tem um peso preponderante na carteira. As generalizações para as outras categorias de veículos, não apresentando problemas teóricos muito particulares, deverão no entanto merecer alguma reflexão em termos práticos, por forma a não só ponderar a sua existência como também a definir os factores tarifários a considerar para cada uma destas categorias.

A este propósito não se quer deixar de assinalar que não se soube ou não se conseguiu motivar a direcção do ramo automóvel para uma colaboração mais estreita e dinâmica que poderia ter conduzido a desenvolvimentos mais concretos em termos do trabalho prático, resultando eventualmente numa estrutura directamente utilizável no mercado.

Antes de se apresentar em linhas genéricas o trabalho desenvolvido (secção 3), pareceu útil traçar-se um breve panorama do ramo automóvel dentro do sector segurador, em função das suas características dominantes (secção 1) e em termos do seu enquadramento legal (secção 2).

1. Ramo automóvel e sector segurador

A característica mais significativa da actividade seguradora é vender um produto cujo ciclo de produção se encontra invertido face à generalidade das actividades económicas. De facto, enquanto na maioria dos casos o produto é vendido após a sua produção, o sector segurador vende apólices cuja validade se irá manter ao longo de um determinado período de tempo, não se conhecendo antecipadamente os custos a associar a cada apólice.

Esta característica origina duas consequências básicas; a primeira e mais evidente nas dificuldades em construir uma tarifa adequada aos riscos seguros, e a segunda de gerar rendimentos adicionais pelo diferencial de tempo que medeia entre o recebimento dos prémios referentes às apólices e o pagamento de eventuais

indemnizações, quantas vezes muito tempo após o termo do período de validade das apólices.

Uma outra consequência, embora só parcialmente possa ser atribuída a esta característica do sector, prende-se com o forte intervencionismo dos poderes públicos, independentemente do peso que as empresas públicas representem. Mesmos nos mercados onde a presença directa do Estado não assume peso relevante, existe sempre uma actividade normativa por parte do poder político por forma a evitar que a concorrência entre seguradoras possa conduzir o sector a situações de ruptura. O reforço das acções neste sentido é mais ou menos evidente nos diferentes países, podendo a situação do Reino Unido servir como paradigma desta evolução.

Em termos nacionais, trata-se de um sector onde actuavam em 1988 (último ano para o qual existem dados uniformes) 37 empresas classificadas em 3 grupos ou seja 21 empresas públicas e sociedades anónimas sediadas em Portugal, 14 agências gerais de seguradoras comunitárias e 2 de empresas não comunitárias.

Por sua vez, o ramo automóvel apresenta algumas características particulares dentro do sector segurador; por um lado representa uma percentagem muito importante nos prémios cobrados o que tem óbvias repercussões a nível da cobertura dos custos fixos e como gerador de rendimentos financeiros, mas por outro lado tem apresentado nos últimos anos um saldo negativo persistente entre os prémios cobrados e as indemnizações pagas.

No quadro 1.1, construído a partir de dados tirados das publicações do Instituto de Seguros de Portugal, representa-se, em termos globais, a estrutura da actividade pelos diferentes ramos, tendo por base o número de apólices emitidas nos anos de 1986 a 1988. Também se inclui a estrutura da carteira da Bonança EP (por razões óbvias) e uma estrutura referente à Comunidade Económica Europeia em 1988, muito embora existam, como se refere no próprio quadro, algumas dificuldades em comparar esta estrutura com as de origem nacional.

De qualquer forma estes elementos permitem sublinhar o peso do ramo automóvel e mostram a evolução muito acentuada do ramo vida com o surgimento, nos últimos anos, de muitos produtos novos que reanimaram bastante este ramo e

Quadro 1.1 - Estrutura das carteiras por ramos (em %)

Ramos	Nacional			Bonança	CEE
	1986	1987	1988	1988	1988
Vida	9.70	12.85	18.10	10.79	42.54
Acidentes e doença	30.02	30.10	27.81	27.19	4.85 ¹
Incêndio e outros danos	15.40	15.13	13.84	12.88	5.15
Automóvel	35.40	32.20	31.20	40.60	20.72
Transportes	5.88	5.64	4.94	5.01	3.41
Responsabilidade Civil	1.19	1.54	1.39	1.94	2.94
Diversos	2.40	2.54	2.72	1.59	20.39

¹ Não inclui acidentes de trabalho

cujas potencialidades são sublinhadas pelo perfil da estrutura referente à C.E.E., sendo de assinalar que o ramo automóvel mantém sempre um peso importante fruto nomeadamente da obrigatoriedade do seguro de responsabilidade civil. No caso da Bonança EP, a característica dominante face ao padrão nacional prende-se com uma importância menor do ramo vida compensada pelo ramo automóvel que assume um peso preponderante.

A importância da Bonança EP no ramo automóvel pode também ser vista no quadro 1.2 onde se refere a quota de mercado das maiores seguradoras neste ramo (dados tirados da publicação do I.S.P. intitulada *Actividade Seguradora em Portugal - Elementos Estatísticos 1988/2*). Sublinhe-se que, se é certo que existem mais de 30 seguradoras a operar, não é menos verdade que se trata de um ramo bastante concentrado uma vez que o conjunto das cinco maiores empresas representa mais de 50% do ramo enquanto as nove primeiras já têm um peso superior a 80%. Refira-se ainda que as empresas públicas cobrem a quase totalidade do ramo, característica que, em termos de evolução futura, virá certamente a sofrer alterações importantes em função do processo de privatizações em curso.

Por seu lado, o gráfico 1.1, extraído de Santos [1989] e construído a partir de dados da Associação Portuguesa de Seguradores, permite visualizar os resul-

Quadro 1.2 - As principais seguradoras no ramo automóvel - RC

Seguradoras	Apólices	Peso (%)
Bonança EP	430639	13.88
Fidelidade Grupo Segurador SA	374881	12.08
Mundial Confiança EP	374180	12.06
Império EP	369816	11.92
Tranquilidade EP	358689	11.56
Aliança Seguradora EP	348275	11.22
Portugal Previdente SA	126900	4.09
Metrópole SA	121007	3.90
Trabalho SA	104171	3.36
Outras	494223	15.93

Gráfico 1.1 - Evolução dos resultados no ramo automóvel

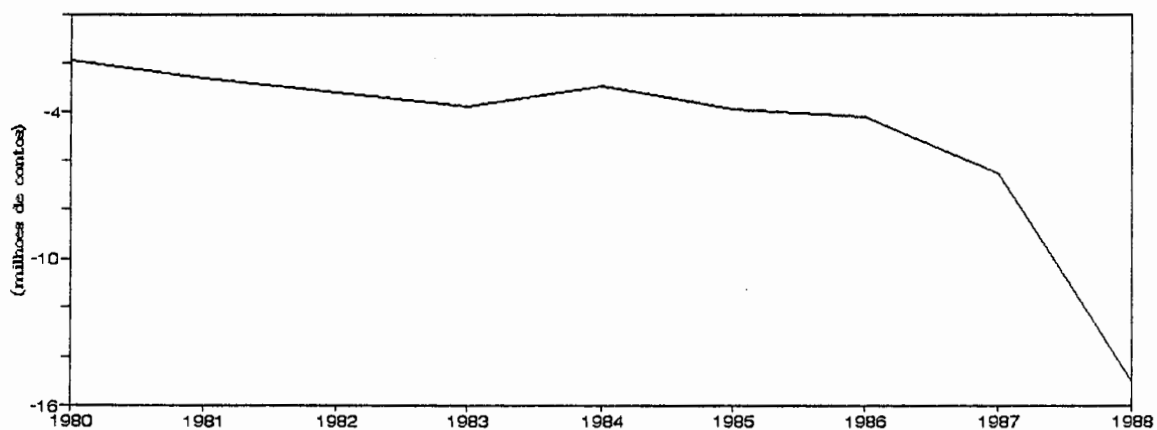


Gráfico 1.2 - Evolução da sinistralidade no ramo automóvel



tados negativos e persistentes do ramo nos últimos anos, situação a que já se fez referência. Neste ponto refira-se que estes dados são apurados em função do diferencial entre indemnizações pagas mais variação no montante das provisões e prémios cobrados, situação que não permite detectar com clareza se os resultados se devem directamente ao ano corrente ou a um cálculo defeituoso das provisões nos anos anteriores. Na evolução do custo médio associado às indemnizações é necessário não esquecer que, para além da componente inflacionária, cuja presença é óbvia, se assistiu à actualização dos valores mínimos a segurar em responsabilidade civil, o que também teve consequências no evoluir destes custos. Na secção seguinte abordar-se-á esta evolução no quadro da variação das normas legais para este ramo.

No gráfico 1.2 procurou-se uma caracterização mais completa da evolução da sinistralidade, representando-se a evolução da frequência de sinistralidade bem como a dos custos médios associados com as indemnizações. Estes dados também foram tirados de Santos [1989], sendo necessário sublinhar que se tratam de dados referentes ao conjunto das seguradoras e abrangendo veículos de todas as categorias e não só ligeiros de passageiros como aqueles que se irão estudar. De qualquer forma a evolução relativa nesta categoria não deverá andar muito longe do perfil

apresentado.

2. O enquadramento legal do seguro automóvel

Se os primórdios da actividade seguradora em Portugal se situam por volta do século XIII ³ com a formação de mutualidades para fazer face sobretudo a riscos de transporte, a criação das primeiras companhias de seguros remonta aos finais do século XVIII, início do século XIX sendo de destacar que algumas delas se mantiveram em actividade até aos dias de hoje, embora na sequência das nacionalizações decretadas em 1975 se tenha assistido a processos de fusão bastante amplos.

Na caracterização dos diplomas mais significativos que regulam esta actividade, refira-se ainda que o exercício da “indústria de seguros” foi regulamentado por decretos datados de 21 e 28 de Dezembro de 1907, tendo-se mantido esta estrutura básica durante quase 80 anos uma vez que muitos artigos apenas foram revogados pelos Decretos-Lei n.º 188/84 e 125/86. Cite-se a este propósito a recolha da legislação mais significativa em *Ventura* [1990].

No que se refere ao seguro automóvel, à semelhança do que se passou na generalidade dos países da Europa, o seguro de responsabilidade civil existe desde o início do século sendo de referir que na Noruega este seguro é obrigatório desde 1907!

Em Portugal existiu um primeiro projecto legislativo para instituir o seguro automóvel de responsabilidade civil obrigatório em 1935, tendo-se discutido desde então muitos projectos que nunca alcançaram consagração legal, até que o Decreto-Lei n.º 165/75, regulamentado pelo DL n.º 166/75, instituiu a sua obrigatoriedade.

A entrada em vigor destes diplomas, inicialmente prevista para Julho daquele ano, foi sucessivamente protelada por dificuldades na implementação das normas

³O documento escrito mais antigo parece ser a “Outorga dos estatutos da Sociedade dos Mercadores” em 1293 por Dom Diniz. Sobre a história dos seguros em Portugal podem ler-se alguns artigos de divulgação na revista *Égide* editada pela Associação Portuguesa de Seguradores, podendo citar-se entre outros *Bethencourt* [1981], sendo também de referir o livro de *Sousa* [1990].

definidas (tenham-se presentes as convulsões sofridas naquele período) até que o DL nº373/76 adiou *sine die* a sua execução.

Em 1979, quando se voltou a abordar esta problemática, o governo achou preferível pôr de parte os diplomas promulgados e posteriormente adiados, por forma a tomar em consideração a evolução que se tinha verificado, nomeadamente a criação do Instituto Nacional de Seguros em Janeiro de 1976 que posteriormente passou a Instituto de Seguros de Portugal.

O Decreto-Lei nº 408/79 que institui a obrigatoriedade do seguro automóvel de responsabilidade civil fixa também regras tarifárias que são definidas desde logo como provisórias e destinadas a serem reformuladas em função da experiência que se venha a recolher. Em termos normativos este decreto procurou definir um grau de cobertura em responsabilidade civil que correspondesse às cláusulas da Convenção Europeia para o Seguro Automovel Obrigatório que Portugal já tinha assinado. Nesta data o montante mínimo do seguro obrigatório estava fixado em 700 contos para os veículos ligeiros de passageiros, sendo objecto de numerosas alterações desde então, sobretudo por imposições decorrentes da adesão à CEE, nomeadamente do cumprimento da 2ª directiva do Conselho, de 30 de Dezembro de 1983 (84/S/CEE). Assim este valor mínimo deverá ser de 600000 ECUs em 1 de Janeiro de 1996, estando definidos valores intermédios mínimos (6% deste valor até finais de 1988 e 31% até finais de 1992).

Para além das várias reavaliações periódicas, destinadas a evitar alterações muito bruscas nos mantantes mínimos a segurar, também se assistiu no decorrer dos anos 80 a alterações significativas na filosofia de construção do sistema tarifário, podendo-se considerar a existência de três fases distintas.

Num primeiro tempo vigorou uma filosofia clássica de reger o seguro por uma apólice e tarifa uniformes para o sector, sistema que foi evoluindo, em simultâneo com a filosofia predominante em termos de política económica, para uma maior flexibilização.

Assim, a partir de Junho de 1976 o Instituto de Seguros de Portugal, ao regulamentar o Decreto-Lei nº 85/86, emitiu as normas 93/86, onde fixa a obrigatoriedade de registo das apólices junto deste Instituto, e 94/86 cujo conteúdo

se refere directamente à fixação de tarifas. Definem-se assim 5 tipos de regimes tarifários:

- Livre - Não carece de aprovação pelo ISP.
- Indicativa - Baseada num regime de referência, carece de aprovação pelo ISP mas pode, em casos específicos, deixar de ser aplicada sem prévia autorização do ISP.
- Própria - Submetida ao ISP pelas seguradoras, sendo, depois de aprovada, de aplicação obrigatória.
- Referência - Tarifa aprovada pelo ISP, estando no entanto as seguradoras autorizadas a propor tarifas próprias para o mesmo ramo.
- Uniforme - Aprovada pelo ISP, tendo carácter geral e obrigatório para o ramo.

Nesta norma o ramo automóvel era referido como sendo de tarifa uniforme, muito embora no preâmbulo deste diploma se falasse já na necessidade de flexibilizar o sistema de tarifas uniformes.

Em Dezembro do mesmo ano, pela norma 223/86, o ISP define a passagem do ramo automóvel de tarifa uniforme para tarifa de referência estando as seguradoras autorizadas a proporem tarifas próprias cobrindo praticamente todos os aspectos com excepção do "sistema de bonificações por ausência de sinistro".

No que se refere ao seguro automóvel a última fase é atingida em Dezembro de 1988 com a norma 238/88 onde se redefinem os regimes tarifários em apenas 4 categorias:

- Livre não registada - Tarifa que não carece nem de registo nem da aprovação do ISP.
- Livre registada - Tarifa que, carecendo de registo, não necessita no entanto da aprovação do ISP.

- Própria - Submetida a registo e aprovação pelo ISP, sendo de aplicação obrigatória.
- Uniforme - Definida pelo ISP com caracter geral e obrigatório.

Neste mesmo diploma, assiste-se à determinação da categoria “livre registada” por omissão, isto é está subjacente ao sistema que a maioria dos ramos vão ser tarifados por cada companhia de forma independente. O ramo automóvel, não sendo explicitamente referido, passa a figurar na categoria geral, isto é com “tarifa livre registada”.

Esta norma do ISP também se destinava a originar uma maior resposta das seguradoras face ao processo de liberalização das tarifas, já que, até à data, esta tinha sido praticamente nula. Assim o ISP impunha que qualquer alteração à tarifa, nomeadamente a sua actualização, passaria necessariamente a ser apresentada como uma nova tarifa, registada como tal no ISP.

Em consequência desta obrigação, assiste-se desde então a uma multiplicidade de tarifas sem que no entanto tenham surgido alterações significativas na concepção dos sistemas tarifários, sendo esta proliferação resultante do facto de qualquer modificação implicar sempre o registo de uma tarifa nova.

Vive-se assim um momento particularmente propício ao surgimento de estudos tendentes a fundamentar estruturas realmente autónomas, que tenham em conta as realidades próprias de cada seguradora, quer em termos dos riscos presentes na carteira quer da sua estratégia de mercado.

3. O estudo realizado

Este trabalho resultou, como já se disse, da conjugação de duas preocupações; por um lado discutir as metodologias mais adequadas para desenvolver estruturas tarifárias, apresentando-se algumas extensões aos modelos teóricos utilizados mas, por outro lado, existiu sempre a intenção de procurar uma metodologia que pudesse ser aplicada em situações onde não existe muita informação disponível já que se

entendeu que estes estudos não podem nem devem ser desligados das actividades do sector, sendo particularmente importante nestas áreas procurar interfaces entre a investigação universitária e o mundo empresarial.

No entanto, e como facilmente se depreende mesmo numa leitura rápida, a base do presente estudo encontra-se mais virada para o mundo académico o que pareceu inevitável tendo em conta a sua finalidade. Pensa-se porém que o tratamento bastante cuidadoso e aprofundado da carteira de uma seguradora, a Bonança EP, mesmo se restringido à responsabilidade cível para veículos ligeiros de passageiros, exemplifica de forma suficientemente clara a aplicabilidade dos métodos propostos bem como ilustra a natureza das dificuldades que se irão colocar a uma seguradora na definição de uma tarifa adequada.

Um aspecto que, desde já, se quer sublinhar é aquele que se prende com a validade de um estudo deste tipo em função do quadro legislativo em vigor. Se o caminho aberto pelo Instituto de Seguros de Portugal em meados da década de 80 parece irreversível com a instauração de uma tarifa para cada seguradora, tornando assim mais evidente a necessidade de adaptar de forma bastante estreita as tarifas aos riscos seguros para tirar partido dos mecanismos de concorrência sem pôr em causa a solvência das empresas (refira-se neste ponto que o ISP mantém sempre presentes mecanismos de controle para evitar situações mais tensas), a sua utilidade também seria grande num sistema de tarifa uniforme, muito embora desempenhando um papel algo diferente.

De facto, se num sistema liberalizado, se procura oferecer o preço mais baixo para o produto sem pôr em causa a empresa, num sistema de tarifa uniforme tratar-se-á de utilizar o estudo para identificar os segmentos de mercado onde se possam obter ganhos marginais, tirando partido das imperfeições do sistema em vigor, assim se compreendendo que, mesmo em países com tarifas uniformes, se assista a um franco desenvolvimento desta área das ciências actuariais.

A estrutura do trabalho vai assentar em três pontos fundamentais, para além do capítulo final destinado a sublinhar algumas conclusões. A primeira parte (capítulos 1 e 2) tem por objectivo principal apresentar a problemática que se irá discutir ao longo do texto, dedicando-se particular importância à discussão do

conceito de prémio e as implicações das estruturas tarifárias.

As metodologias

Num segundo tempo (capítulos 3 a 5) apresentam-se as principais metodologias relacionadas com a definição de estruturas tarifárias, começando-se por traçar um breve panorama de alguns métodos que, não sendo directamente utilizados no trabalho, conhecem no entanto grande aplicação prática ou fomentam interesse teórico. Aproveita-se também para apresentar os conceitos de factores à priori e à posteriori que se tornam imprescindíveis para um bom entendimento da problemática em causa.

Após uma apresentação geral (capítulo 3), abordam-se as duas áreas de investigação que foram tratadas desenvolvidamente neste estudo, dedicando-se um longo capítulo a cada uma delas.

No capítulo 4 discutem-se de forma mais aprofundada as metodologias baseadas nos modelos lineares generalizados ("Generalized Linear Models") com particular incidência para os ambientes em que se irá recorrer a estes modelos. Após uma apresentação sumária da metodologia elaborada por *Nelder & Wedderburn* [1972] abordam-se os modelos constituídos apenas por factores propondo-se então o seu tratamento de forma agregada, à semelhança da formalização de *Stroinski* [1987]. Sublinham-se, no entanto, as limitações decorrentes do processo sugerido por aquele autor para estimar valores aproximados para a "deviance" no caso dos modelos com distribuição de Poisson, tendo-se mostrado que a diferença entre os desvios nos modelos individuais e agregados depende apenas de uma constante aditiva função da agregação, isto é, independente dos factores incluídos em cada modelo. Partindo desta realidade, determina-se a informação agregada que é necessário reter por forma a permitir a dedução da "deviance" referente ao modelo individual a partir do modelo agregado, para as distribuições mais utilizadas.

Para além deste estudo em torno dos modelos agregados também se analisa a qualidade dos estimadores sugeridos em *Ter Berg* [1980a] e [1980b], mostrando-se que constituem não só um ponto interessante para iniciar a pesquisa numérica das

estimativas de máxima verosimilhança como fornecem também, na grande maioria dos casos, valores muito aproximados aos destas estimativas.

No que se refere aos testes de qualidade do ajustamento propõem-se, para além das abordagens tradicionais baseadas no estudo da "deviance", dois testes adicionais para modelos agregados com distribuição de Poisson, muito embora a sua adequação se tenha mostrado um tanto ou quanto limitada para modelos com taxas médias tão baixas, dado o peso muito grande da componente meramente aleatória.

No capítulo 5, abordam-se os sistemas de bonus, ponto que mereceu particular atenção quer pelo seu interesse estatístico quer pelas suas potencialidades na elaboração de tarifas. Para além de uma apresentação crítica destes sistemas, incluindo também os principais critérios de avaliação da sua qualidade, propõe-se a criação dos sistemas com escala geométrica bem como algumas generalizações possíveis.

Se o contributo mais significativo parece ser a construção de sistemas com escala de prémios geométrica, situação que se pensa particularmente interessante, em termos de mercado, por impor penalizações com um peso relativo constante em relação ao prémio cobrado nas diferentes classes do sistema, também se devem realçar os estudos feitos no sentido de avaliar as compatibilidades entre as diferentes filosofias de avaliação da qualidade dos sistemas de bonus bem como aqueles que se destinaram a comparar as prestações com os diferentes tipos de escalas (escala Bayes definida em termos optimizados - *Norberg* [1976] e *Borgan & al* [1981]-, escala linear estabelecida em *Gilde & Sundt* [1989] e escala geométrica proposta neste trabalho).

Os resultados obtidos permitem por um lado sublinhar uma certa concordância entre os dois critérios básicos utilizados - a elasticidade do prémio face à sinistralidade média prevista e um critério baseado no erro quadrático médio - e mostram claramente, por outro lado, que a passagem de um sistema óptimo para sistemas de variação constante (linear ou geométrica) não vem afectar de forma sensível a qualidade dos resultados, desde que as regras de transição e o número de classes sejam adequados. Para além de se compararem vários sistemas, apresentam-se algumas

regras de determinação, para cada sistema, do número de classes a considerar bem como da classe inicial a fixar.

A principal consequência dos sistemas de bonus em termos de comportamento dos segurados, o aparecimento de uma tendência para não participar pequenos sinistros para não sofrer agravamentos futuros em termos do prémio a pagar, fenómeno conhecido como a *sede de bonus*, também foi objecto de análise discutindo-se o algoritmo proposto por *Lemaire* [1985] para a sua avaliação em termos da política óptima dos segurados e propondo-se, em função de algumas deficiências que se detectaram, soluções que permitam uma correcta avaliação deste fenómeno.

A elaboração da estrutura tarifária

Aspectos introdutórios

Após esta parte mais teórica, muito embora se tenha sempre tido o cuidado de apresentar diversos exemplos ao longo do texto, procede-se a uma descrição muito sumária das conclusões obtidas nos principais estudos empíricos publicados na literatura especializada (capítulo 6) por forma a criar um termo de comparação para os resultados que se irão obter.

Neste ponto procurou-se não só seleccionar, de entre os estudos publicados, aqueles que apresentam maior inovação ou interesse em termos do seu significado para a actividade do sector, como também cobrir de forma tão completa quanto possível as diferentes facetas dos problemas inerentes à elaboração de tarifas, não se limitando à partida a escolha aos casos modelizáveis com a informação disponível para Portugal.

Entra-se então na aplicação prática com a apresentação dos dados disponíveis e dos tratamentos preliminares que se efectuaram (capítulo 7) antes de proceder a uma primeira análise dos dados em termos marginais (capítulo 8).

Assim o capítulo 7 tem por finalidade não só a descrição formalizada da informação a que se teve acesso como também discutir alguns problemas prévios

a qualquer modelização, problemas esses que se prendem com a construção dos ficheiros de trabalho a partir dos elementos disponíveis. Neste ponto a questão mais importante será sem dúvida a escolha do período a estudar, muito embora existam desde logo fortes restrições em função da informação disponível.

Após estabelecer alguns critérios que devem orientar esta escolha, estudaram-se as alternativas possíveis, tendo-se concluído pelo maior interesse em analisar as carteiras baseadas nos anos civis, isto é construir duas bases de dados, a primeira referente a 1987 e a segunda a 1988. Sublinhe-se que, como se dispunha de mais informação para 1988 foi necessário postular algumas hipóteses para uma elaboração mais completa dos ficheiros de trabalho.

O capítulo 8 tem por objectivo principal não só discutir as formas de avaliar a sinistralidade em responsabilidade civil com base nos dados existentes como sobretudo efectuar uma primeira análise dos mesmos com o intuito de avaliar os efeitos de cada factor, individualmente considerado, na sinistralidade.

As conclusões que se depreendem desta análise correspondem no essencial ao que seria de esperar em termos dos resultados observados noutros países. Assinale-se apenas como excepção que a antiguidade dos veículos parece diminuir a sua propensão para se envolverem em sinistros ao contrário do que a tarifa então em vigor assinalava e do que se observa em estudos similares para outros países.

Finalmente, e talvez resida aqui um dos pontos mais importantes para o desenvolvimento da aplicação, aproveitou-se este estudo em termos marginais para definir as alternativas mais adequadas para construir um factor que traduzisse a zona de circulação habitual do veículo procurando-se assim restringir desde logo este problema a duas ou três alternativas plausíveis.

Modelização

O centro da aplicação que se realizou desenvolve-se ao longo de três capítulos (9 a 11), começando-se no capítulo 9 por abordar uma modelização dos factores à priori, mantendo-se o sistema de agravamentos em vigor, o que constituiu uma primeira alternativa para introduzir melhorias significativas no sistema tarifário. Se bem

que esta análise se desenvolva apenas em termos da frequência de sinistralidade, ela permite no entanto sublinhar uma certa permanência nos comportamentos relativos ao longo dos dois anos que se teve a possibilidade de analisar bem como tirar algumas conclusões de indiscutível interesse.

Entre estas, sublinha-se não só o interesse na consideração de uma variável regional, como também a importância assumida pelo sistema de descontos em vigor, muito embora este sistema possa ser objecto de francas melhorias como se verá no capítulo seguinte, o que sublinha a importância dos mecanismos de tarifação à posteriori, para além de se assinalarem os efeitos originados por um novo tratamento do factor *idade do segurado*, incluindo-se nele a natureza deste, isto é se se trata de um particular ou de uma empresa já que os registos correspondentes a empresas mantêm sempre este campo omissos.

Refira-se aqui o interesse que haveria em recolher mais características, incluindo-se nesta recolha uma procura sistemática da informação necessária para completar muitos registos parcialmente omissos (a idade do segurado ou a marca e modelo dos veículos são exemplos particularmente esclarecedores), única forma de fundamentar uma estrutura mais discriminada.

No capítulo 10 discutem-se os problemas inerentes à determinação de um sistema tarifário global onde também se considere a estimação de um sistema de bonus/malus definindo-se então metodologias alternativas com o intuito de avançar na resolução deste problema, procurando-se assim ultrapassar uma das limitações mais importantes dos estudos publicados nesta área.

Começando por mostrar as limitações do sistema de descontos/agravamentos em vigor em Portugal, aponta-se para a necessidade de alterar este aspecto essencial da estrutura tarifária. Discutem-se então as metodologias mais adequadas para compatibilizar o estudo da avaliação à posteriori com a abordagem feita em termos dos modelos lineares generalizados, propondo-se uma solução para a qual não existe, infelizmente toda a informação necessária à sua implementação.

Para ultrapassar tais limitações, houve necessidade de construir uma carteira simulada que, respeitando a informação existente, proceda quando necessário à

afecção de um determinado número de sinistros pelos diversos períodos, uma vez que apenas se conhece, em muitos casos, o total de participações referentes a vários anos.

Com base nesta carteira aplica-se então a metodologia previamente definida, obtendo-se assim uma estrutura que tenha em conta os factores à priori de maior interesse, e que se fundamente num sistema de bonus adequado. Refira-se aqui que a escolha das regras de transição e do número de classes a considerar foi feita com base no estudo teórico desenvolvido no capítulo 5.

No quadro deste modelo mais global, sublinha-se o bom comportamento em termos estatísticos da escala geométrica que se mostrou de grande interesse dada a sua maior simplicidade, fenómeno que se torna evidente num modelo com estrutura multiplicativa.

Enquanto nos capítulos 9 e 10 se tratam as estruturas com base na frequência de sinistralidade, com o objectivo de determinar as discriminações a introduzir na carteira, no capítulo 11 não só se discute o perfil de custos a associar aos sinistros como também se analisam alguns problemas relacionados com a implementação de um sistema novo.

Foi neste campo que se veio a sentir de forma mais aguda o facto de não ter sido possível estabelecer um diálogo mais profundo com a empresa seguradora, facto que conduziu a que apenas se pudessem apresentar alguns exemplos para ilustrar as considerações que se foram tecendo.

De qualquer forma o ponto central deste capítulo será certamente o mostrar que as diferentes metodologias e considerações mais particulares que se foram fazendo ao longo do trabalho têm aplicabilidade num mercado segurador como o português, constituindo um processo bastante mais rigoroso, quer em termos do estabelecimento das hipóteses que fundamentam o processo de discriminação a introduzir na tarifa, quer sobretudo na tradução destes princípios em termos dos prémios a cobrar aos segurados.

Finalmente, sintetizam-se num último capítulo as principais conclusões que se foram estabelecendo ao longo do estudo, traçando-se também algumas pistas

para desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Prémio e Tarifa

Este capítulo tem por objectivo principal apresentar uma primeira reflexão sobre alguns conceitos que irão sendo utilizados ao longo do trabalho, permitindo assim sublinhar algumas hipóteses que lhes estão subjacentes e mostrar que nem sempre foram estabelecidos com base em processos completamente pacíficos.

Na primeira secção discute-se o conceito de prémio, dando-se particular importância às diferentes abordagens existentes para o seu cálculo, enquanto numa segunda secção se abordam os princípios inerentes à construção de tarifas para finalmente concluir com a apresentação de alguns comentários sobre as ligações existentes entre o pagamento de indemnizações e a responsabilidade do segurado, servindo esta secção essencialmente para referir a existência de outras modalidades possíveis para seguros de responsabilidade civil.

1. O conceito de prémio

Como é sabido, a actividade seguradora consiste, na sua essência, na transferência de um risco do segurado para a seguradora, recebendo esta em troca um montante monetário fixo¹, o prémio. Se a caracterização do risco não levanta, em termos

¹Em termos da actividade prática das seguradoras, existem algumas distorções a este princípio, nomeadamente no ramo automóvel com a introdução dos sistemas de bonus. De qualquer forma,

teóricos, grandes problemas, sendo feita através de uma variável aleatória X que representa o montante monetário (ou uma função deste nalguns casos) associado ao risco em causa, isto é as indemnizações a serem pagas pela companhia, já a definição dos elementos inerentes ao prémio é algo mais complexa.

A grande divergência nesta matéria reside em saber se o prémio deve ser determinado apenas em função das características do risco a segurar, visão dominante em termos da ciência actuarial, ou se, pelo contrário, o elemento fundamental na determinação do prémio, ou mais precisamente da componente do prémio destinada a cobrir as flutuações aleatórias inerentes ao risco transaccionado, é constituída pelo jogo das forças de mercado.

De facto, desde muito cedo a ciência actuarial procurou avaliar o risco por forma a definir um prémio que fosse equilibrado, isto é que não induzisse sobre lucros excessivos para as seguradoras mantendo no entanto a solvência das companhias. Como é evidente não se trata de negar o impacto do mercado na fixação dos prémios mas sim de separar claramente o cálculo do prémio "justo" em termos actuariais da sua implementação no mercado, onde é indiscutível que outros elementos são tidos em conta.

A segunda via de abordagem, bastante mais tardia, partiu dos trabalhos pioneiros em economia da incerteza, com particular incidência na teoria dos jogos e nos trabalhos desenvolvidos por Arrow (nomeadamente *Arrow* [1953]), surgindo as primeiras formulações desenvolvidas por Borch² a partir do início dos anos 60, formulações essas que discutem o estabelecimento dos prémios em função dos mecanismos do mercado, com particular incidência no conceito de utilidade esperada.

Nesta secção começar-se-á por expor de forma breve os elementos essenciais a cada uma destas abordagens para, posteriormente, tecer alguns comentários tendo presente o tipo de seguro que se vai estudar neste trabalho.

a variância no prémio a pagar é sempre incomparavelmente menor do que a variância do risco seguro.

²Veja-se nomeadamente uma compilação dos artigos fundamentais deste autor em *Borch* [1974].



1.1. O prémio como função do risco

Nas abordagens feitas em termos actuariais definem-se 3 componentes básicas para o prémio:

- O prémio puro que equivale à esperança matemática do risco;
- Uma margem de segurança cuja justificação reside na desigualdade de Jensen e que se destina a defender a seguradora face à componente aleatória do risco;
- Uma carga adicional destinada a cobrir os gastos administrativos, já que os dois primeiros aspectos apenas têm em conta o risco em si.

Apresentando o terceiro ponto uma natureza distinta dos restantes, sendo estabelecido fora do processo de risco e encontrando-se intimamente ligado a aspectos de gestão corrente da seguradora, ele só voltará a ser abordado no capítulo 11 quando se estabelecerem valores concretos para a tarifa.

Se todos os princípios que se vão aqui apresentar definem os prémios como soma de duas parcelas sendo a primeira a esperança matemática do risco e destinando-se a segunda a servir de margem de segurança, a diferença entre eles residirá na forma de estabelecer esta margem, itentificando-se 5 casos característicos, que originam outros tantos princípios:

- **Valor Esperado** - $\pi = (1 + \alpha) E(X)$ - a margem de segurança é proporcional à esperança matemática do risco.
- **Perda Máxima** - $\pi = E(X) + \alpha \max(X)$ - recorrendo-se ao valor máximo do risco para determinar a carga de segurança (caso não exista máximo pode recorrer-se a um valor suficientemente grande).
- **Variância** - $\pi = E(X) + \alpha \text{Var}(X)$ - utilizando-se a variância como factor representativo da aleatoriedade.
- **Desvio-Padrão** - $\pi = E(X) + \alpha \sigma(X)$ - sendo agora o desvio-padrão a traduzir a aleatoriedade.

- **Semi-Variância** - $\pi = E(X) + \alpha \text{Var}_+(X)$ - utilizando-se como factor representativo da aleatoridade a "semi-variância"

$$\text{Var}_+(X) = \int_{E(X)}^{\infty} (x - E(X))^2 dF(x)$$

sendo $F(x)$ a função de distribuição de X . A ideia base deste princípio é substituir a variância como representante do risco assumido pela seguradora pela semi-variância já que os casos a defender apenas se situam naquela parte do domínio de X .

Em termos práticos os dois princípios mais utilizados são o do Valor Esperado e o do Desvio-Padrão com maior pendor para o primeiro. Neste trabalho está implícito o recurso ao princípio do valor esperado se bem que, ao trabalhar com a Poisson quando apenas se considera a frequência de sinistralidade, exista convergência entre este e o princípio da variância.

Uma apresentação muito completa desta família de princípios pode ser vista em *Goovaerts & al* [1984], onde se discute a qualidade dos prémios calculados com base nos diferentes princípios em função dum conjunto de propriedades consideradas desejáveis. Neste quadro, sublinhe-se que o princípio do valor esperado, parecendo o mais simplista, não deixa de gozar de propriedades significativas.

Refira-se ainda que estes autores também abordam algumas metodologias baseadas na utilidade esperada, muito embora só considerem aquelas que apenas modelizam a oferta.

1.2. O recurso à utilidade esperada

A determinação do prémio com base na utilidade esperada abrange duas categorias de problemas. Por um lado, alguns autores definem o prémio com base na utilidade esperada da seguradora, isto é apenas consideram a oferta, enquanto outros procuram modelizar a totalidade dos intervenientes no mercado.

Os primeiros situam-se assim entre as duas correntes que foram referidas, enquanto os segundos representam claramente a visão mais próxima da teoria económica.

O princípio da utilidade esperada nula Dentro dos princípios que apenas modelizam a oferta só se irá destacar o princípio da utilidade esperada nula por ser não só o mais simples como também (e talvez por isso mesmo) o mais divulgado, sublinhando-se no entanto que existem outros casos com bastante interesse teórico como sejam nomeadamente os princípios de Orlicz ou de Esscher.

Considere-se então uma função de utilidade u nas condições habituais ³, definido-se o prémio calculado segundo o princípio da utilidade nula como a raiz da equação em p

$$E[u(s + p - X)] = u(s) ,$$

sendo s a riqueza inicial da seguradora, isto é estabelecendo como prémio a quantia para a qual a utilidade esperada é idêntica quer a seguradora aceite ou rejeite o risco a segurar. Refira-se ainda que os estudos baseados neste princípio costumam seleccionar algumas funções de utilidade que conduzem a situações simples, nomeadamente uma função de utilidade exponencial dada por

$$u(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{a}, \quad a > 0,$$

caso em que se pode explicitar o prémio, obtendo-se

$$\pi = \frac{\ln E(e^{aX})}{a}.$$

A modelização do mercado Assume-se então que o mercado é constituído por n agentes, cada um deles possuindo uma carteira de rendimentos aleatórios⁴ representada por uma variável aleatória S_i ($i = 1, \dots, n$), que recorrem ao mercado para negociar entre elas estes riscos por forma a melhorar a sua utilidade esperada $E(u_i(S_i))$.

³isto é $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua não decrescente, com derivada não crescente, normalizando-se os valores da função ($u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$).

⁴Em termos de uma seguradora a situação "clássica" será considerar que S_i é igual ao capital inicial mais os prémios menos as indemnizações a pagar pelos riscos aceites, isto é

$$S_i = s_i + \pi_i - X_i,$$

considerando-se que a aleatoriedade de S_i provem das indemnizações a pagar representadas por X_i .

Seja então Y_i a carteira do agente i depois das trocas, tendo-se

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n S_i = S \quad (2.1)$$

definindo S como a soma dos rendimentos envolvidos. *Gerber* [1987] refere aliás um tipo de troca muito simples em que

$$Y_i = q_i S + c_i$$

sendo q_i a quota do risco global que o agente i fica a deter depois das trocas e c_i o montante dos pagamentos ou recebimentos feitos por este agente no mercado. Em virtude de (2.1) ter-se-á

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n c_i = 0$$

Caso o mercado seja eficiente, como se supõe, as trocas deverão conduzir a uma situação de óptimo de Pareto, processo que pode ser formalizado como a determinação do conjunto dos Y_i (funções de S_1, \dots, S_n) que maximizem

$$z = \sum_{i=1}^n k_i E[u_i(Y_i)]$$

para um conjunto arbitrário de ponderadores positivos k_1, \dots, k_n (veja-se por exemplo *Borch* [1984] ou *Gerber* [1987]), situação para a qual se deduz como condição equivalente (teorema de *Borch*⁵) que $k_i u'_i(Y_i)$ não dependa de i .

Para ilustrar as potencialidades deste resultado na determinação dos pontos correspondentes a óptimos de Pareto, retome-se o exemplo anterior tirado, como se disse, de *Gerber* [1987] supondo-se assim

$$\begin{aligned} Y_i &= q_i S + c_i & i &= 1, \dots, n \\ u_i(S_i) &= a_i^{-1} (1 - e^{-a_i S_i}) & i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

o que permite deduzir

$$k_i u'_i(Y_i) = k_i e^{-a_i c_i} e^{-a_i q_i S} \quad i = 1, \dots, n$$

⁵A sua dedução pode ser vista no capítulo 9 de *Borch* [1974] que constitui uma re-impressão de uma artigo de 1960 ou em livros de âmbito mais genérico (*Bühlmann* [1970] por exemplo).

expressão que, pelo teorema de Borch, terá de ser independente de i para que se esteja num óptimo de Pareto. Nestes pontos, ter-se-á

$$\begin{cases} a_i q_i = a & i = 1, \dots, n \\ k_i e^{-a_i c_i} = k & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} q_i = \frac{a}{a_i} & i = 1, \dots, n \\ c_i = \frac{\ln k_i - \ln k}{a_i} & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{1}{a} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \ln k = \sum_{i=1}^n q_i \ln k_i \end{cases}$$

Este resultado tem como particularidade mais significativa o facto da indeterminação apenas residir na componente determinística uma vez que q_i não depende dos parâmetros arbitrários k_1, \dots, k_n .

O espaço dos óptimos de Pareto terá assim, no caso geral, uma dimensão $n - 1$, sendo necessário encontrar algum processo que permita optar por uma solução admissível, já que mesmo que se estabeleça como restrição adicional que nenhum agente perca com as trocas isto é que $u_i(Y_i) \geq u_i(S_i)$, $\forall i$ o que, no exemplo apresentado, se irá traduzir por

$$E[e^{-a_i Y_i}] \leq E[e^{-a_i S_i}] \quad i = 1, \dots, n$$

não se poderá garantir a unicidade da solução.

Diversos modelos foram construídos com este fim (*Bühlmann* [1980] e [1984], *Borch* [1984] e [1985], *Chan & Gerber* [1985] entre outros) não se desenvolvendo mais este ponto para não alongar em demasia este aspecto que, como se irá ver, não pode deixar de se situar fora do âmbito do presente trabalho.

Alguns comentários A ideia fundamental que importa destacar, muito embora a literatura especializada não costume referir este ponto, consiste na necessidade de enquadrar a abordagem que se faça do conceito de prémio com o tipo de mercado que se esteja a modelizar bem como a natureza do seguro.

De facto, as hipóteses que sustêm as análises com base na modelização do mercado dirigem-se muito mais ao mercado ressegurador, como diversos autores

referem explicitamente, apenas se concebendo o mercado segurador como situação limite da anterior, para não abordar as tradicionais dificuldades que se encontram no postular das funções utilidade dos diferentes agentes.

Um segundo problema significativo diz respeito ao enquadramento jurídico que regulamenta determinado seguro uma vez que, no caso dum seguro obrigatório como o de responsabilidade civil automóvel, a procura por parte do mercado deverá ser equacionada de forma bem diferente daquela que se refere a um seguro voluntário.

Por último também será certamente de grande importância equacionar a validade da tarifa, nomeadamente se se trata de uma tarifa única para o sector ou se pelo contrário se está numa situação liberalizada onde cada seguradora define estes elementos de forma mais ou menos independente. Se numa modelização do mercado com base na maximização da utilidade esperada dos diferentes agentes envolvidos, se procurará deixar jogar os diferentes agentes deste mercado, cabendo apenas à autoridade de controle o garantir a sua eficiência, não deixa de ser verdade que existem em termos reais regulamentações bastante complexas, tendo-se até reforçado nalguns países com uma tradição mais liberalizante (Reino Unido nomeadamente) o peso das normas visando garantir que a concorrência não leve as seguradoras a actuar abaixo de certas margens de solvência.

Neste quadro, e não obstante o interesse teórico destas formulações que sublinham o papel dos elementos exógenos ao risco na avaliação deste mesmo risco, apenas parece possível definir o prémio com base essencialmente nas características inerentes ao risco a que se referem, corrigindo-se eventualmente os valores obtidos antes de implementar a tarifa em termos de mercado, tendo sobretudo presentes as acções lançadas pelas empresas concorrentes, isto é no fundo apenas se procurará abarcar, para além do risco em si-mesmo, algumas particularidades do mercado sem recorrer geralmente a nenhuma modelização específica.

2. Objectivos inerentes à construção de tarifas

Consistindo a tarifa no conjunto de regras que permitem definir o prémio a pagar por cada apólice, ter-se-á de passar da análise inerente a cada risco para uma abordagem em termos do conjunto de apólices referentes a riscos de natureza semelhante.

Nesta generalização é necessário ter presente não só em que medida os diferentes riscos são semelhantes ou melhor dizendo qual o peso das características individualizáveis (ou para as quais existam sub-grupos com maior grau de homogeneidade) na quantificação do risco a assumir pela seguradora mas também quais as consequências que uma eventual discriminação entre riscos irá arrastar.

Pareceu assim útil reflectir um pouco sobre os objectivos inerentes a uma tarifa (sobretudo quando aplicada num seguro de tipo compulsivo) e, mais do que isso, sobre as possíveis evoluções desses mesmos objectivos já que uma tarifa adequada deve projectar-se pelo menos no médio prazo.

Tal tema não costuma ser objecto da literatura especializada, definindo-se desde logo que se deve procurar adequar da melhor forma o prémio cobrado ao risco seguro, admitindo-se quanto muito uma proibição exógena em utilizar certa informação nalguns países. Sendo o seguro automóvel obrigatório e assumindo um peso significativo na actividade das companhias seguradoras, as tarifas não podem deixar de reflectir, por inclusão ou omissão, alguns critérios de solidariedade da sociedade em que se inserem mesmo quando vigora um sistema de tarifas diferenciadas por seguradora, na medida em que existe sempre uma autoridade de controle que proíbe o uso de determinadas variáveis (algumas até se podem considerar vetadas pela própria sociedade já que não seriam aceites pelos segurados) como por exemplo a raça ou o sexo ou até algumas formas de penalização para certos grupos etários.

Neste ponto procurar-se-á então discutir, utilizando um raciocínio semelhante ao de *de Witt e van Eeghen* [1983], os efeitos da discriminação que as tarifas impõem no prémio a pagar bem como avaliar os impactos da não utilização de elementos relevantes para a definição do prémio.

Quadro 2.1 - Situações possíveis

caso	Entidade	Risco Assumido	V. Esperado	Variância
1	Segurados	$E(X)$	$E(X)$	0
	Seguradora	$X - E(X)$	0	$S = \text{Var}(X)$
2	Segurados	$E(X \Theta)$	$E(X)$	S_r
	Seguradora	$X - E(X \Theta)$	0	S_p
3	Segurado	$E(X A)$	$E(X)$	S_{kr}
	Seguradora	$X - E(X A)$	0	$S_p + S_{ur}$

Notas: $S_r = \text{Var}[E(X|\Theta)]$

$S_p = E[\text{Var}(X|\Theta)]$ ou seja $S = S_r + S_p$

$S_{kr} = \text{Var}[E(X|A)]$

$S_{ur} = E\{\text{Var}[E(X|\Theta)|A]\}$ e portanto $S = S_{kr} + S_p + S_{ur}$

2.1. Discriminação e solidariedade entre segurados

Considere-se então uma carteira composta por riscos de natureza semelhante mas com algumas características próprias, situação que se poderá representar por um processo de risco de inspiração bayesiana, que é comum aliás a muitos textos de teoria da credibilidade.

Supõe-se então que cada risco é traduzido por uma variável aleatória X que se admite caracterizada por um parâmetro estrutural θ (em princípio não observável), realização da variável aleatória Θ , cuja distribuição será característica da carteira em estudo.

Por outro lado, e com o intuito de simplificar ao máximo os elementos acessórios, recorre-se apenas ao prémio puro, não se considerando nem cargas administrativas nem margens de segurança.

O enquadramento para a discussão que se seguirá vai ser feito recorrendo a três casos paradigmáticos que permitem comparar diversas situações:

1. O prémio não tem em conta o parâmetro estrutural, ou seja existe plena solidariedade entre os segurados, não se atendendo às características próprias

de cada risco. Neste caso, sendo o prémio constante no colectivo, a variância do risco estará toda a cargo da seguradora.

2. Supõe-se Θ observável, pagando cada segurado o equivalente ao seu prémio puro de risco ⁶. Não se alterando o prémio médio no colectivo, assistir-se-á no entanto à decomposição da variância do risco em duas componentes:

- A primeira, S_r , corresponde à variância nos prémios pagos pelos segurados, e interpreta-se como a parcela da variância total que é inerente ao risco em si mesmo e que está a cargo dos segurados.
- A segunda, S_p , vai manter-se na responsabilidade da seguradora e traduz a aleatoriedade contida nos riscos seguros.

A igualdade $S = S_r + S_p$, traduzindo um resultado bem conhecido da teoria das probabilidades, mais não faz do que sublinhar que apenas se alterou a situação relativa das diferentes partes e não o processo de risco.

Esta situação, apresentando interesse meramente teórico já que, como se sabe, o parâmetro estrutural apenas se consegue estimar, vai no entanto servir de referência para a terceira situação onde se fará uma aproximação mais cuidada à realidade.

3. Seja então Θ não observável, apenas se dispondo dum conjunto de informações sobre cada risco, informação que se admite representada numa variável aleatória A , esta sim observável (A poderá eventualmente ser um vector de variáveis aleatórias).

Admite-se ainda que a distribuição de X dado Θ não depende de A , isto é

$$\forall I \subset \mathbb{R}, \text{ Prob}[X \in I | \Theta, A] = \text{Prob}[X \in I | \Theta]$$

ou seja que A não acrescenta nada ao conhecimento de X quando Θ é conhecido.

⁶Recorde-se que o prémio puro de risco é definido pelo valor esperado do risco, dado o valor do parâmetro estrutural, isto é $E(X|\theta)$.

A construção de uma tarifa consiste então, dum ponto de vista prático, a definir os elementos a incluir em A , bem como a estimar a distribuição de X dado A .

Mantendo-se o princípio de cálculo do prémio, a substituição de Θ por A no cálculo do prémio não altera o prémio médio cobrado pela seguradora mas implica uma maior solidariedade entre segurados, já que a variância entre os prémios pagos vai diminuir, aumentando a parcela que fica a cargo da seguradora em valor idêntico.

Este processo traduz-se então pela separação de S_r em duas componentes, sendo S_{kr} a parte da variância que se sabe ser atribuível ao risco quando se conhece A e S_{ur} a parcela que permanece desconhecida e que passa para a responsabilidade da seguradora ⁷.

Vê-se assim que qualquer tarifa constitui um ponto intermédio entre as duas primeiras situações apresentadas que correspondem aos casos extremos. Refira-se no entanto que só se consideraram os casos onde existe actividade seguradora já que a não existência de seguro pode ser interpretada como ausência total de solidariedade, assumindo cada um o seu risco de forma individual.

Ao procurar aproximar a tarifa da situação 2 (conhecimento de Θ), está-se no fundo a defender uma solidariedade do colectivo no que toca apenas à parte aleatória do risco, tarifando-se cada um de acordo com as características inerentes ao seu risco particular.

Esta aproximação é tanto mais complexa (e por vezes discutível) quanto nem sempre são muito claras as relações de causa a efeito entre os factores tarifários e o

7

$$\begin{aligned}\text{Var}(X|A) &= E(X^2|A) - E^2(X|A) \\ &= E[E(X^2|\Theta)|A] - E^2[E(X|\Theta)|A] \\ &= E[\text{Var}(X|\Theta)|A] + \text{Var}[E(X|\Theta)|A]\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}E[\text{Var}(X|A)] &= E[\text{Var}(X|\Theta)] + E\{\text{Var}[E(X|\Theta)|A]\} \\ &= S_p + S_{ur}\end{aligned}$$

risco a segurar, existindo elementos cuja justificação se baseia essencialmente em correlações estatísticas ou pode considerar-se como uma avaliação muito indirecta de elementos de indiscutível relevância, tornando-se assim problemática a inclusão de certas variáveis.

Antes de prosseguir a discussão deste ponto e de analisar os possíveis efeitos da não utilização deliberada de certos factores na tarifa, apresenta-se um pequeno exemplo para ilustrar o processo que se acaba de descrever.

2.2. Um exemplo com a distribuição de Poisson mista

No exemplo que se irá apresentar, procurou-se uma situação que, não envolvendo grandes dificuldades de cálculo, fosse no entanto minimamente realista para o seguro automóvel. Admitiu-se assim que cada risco X é constituído pelo número de indemnizações que podem ocorrer num determinado intervalo de tempo, não se atendendo ao custo das mesmas, que se supõe constante, por forma a não envolver um processo composto. Neste contexto escolhe-se como unidade monetária o custo médio de um sinistro, supondo-se que X tem distribuição de Poisson de parâmetro Θ obedecendo este a uma distribuição Gama de parâmetros n e α .

Facilmente se deduzem os elementos referentes às duas primeiras situações já que:

$$\begin{aligned} E(X|\theta) &= \theta \\ \text{Var}(X|\theta) &= \theta \\ E(X) &= n\alpha^{-1} \\ \text{Var}(X) &= n\alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1}) \\ E[\text{Var}(X|\theta)] &= n\alpha^{-1} \\ \text{Var}[E(X|\theta)] &= n\alpha^{-2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Define-se então uma variável A admitindo-se que, não se conseguindo observar Θ , se conhece no entanto um intervalo onde este se situa. Substitui-se assim uma variável contínua não observável por uma variável discreta com J classes. Esta hipótese, não sendo muito plausível em termos práticos já que apenas se

conseguirão estimar, com maior ou menor erro, estes intervalos, permite no entanto uma calculatória bastante simples.

Seja então a variável A , que divide o intervalo $(0, \infty)$ em J sub-intervalos que, por comodidade, se suporão equiprováveis. O intervalo j será então definido através de a_{j-1} e a_j com

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \int_0^{a_j} f(\theta) d\theta = \int_0^{a_j} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} e^{-\alpha \theta} \theta^{n-1} d\theta = \frac{j}{J} \quad j = 1, \dots, J-1 \\ a_J = +\infty \end{cases} \quad (2.3)$$

Assim sendo

$$f(\theta|A=j) = J \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} e^{-\alpha \theta} \theta^{n-1} \quad a_{j-1} < \theta < a_j \quad (2.4)$$

e como

$$S_{kr} = \text{Var}[E(X|A)] = \text{Var}\{E[E(X|A, \theta)|A]\} = \text{Var}[E(\theta|A)]$$

calcula-se

$$E(\theta|A=j) = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{J \alpha^n}{\Gamma(n)} e^{-\alpha \theta} \theta^n d\theta = \frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha^{n-1}}{\Gamma(n)} J \Delta_j \quad (2.5)$$

com

$$\begin{cases} \Delta_j = (a_{j-1}^n e^{-\alpha a_{j-1}} - a_j^n e^{-\alpha a_j}) & j = 1, \dots, J-1 \\ \Delta_J = a_{J-1}^n e^{-\alpha a_{J-1}} \end{cases}$$

e portanto

$$E[E(X|A)] = E[E(\theta|A)] = \frac{n}{\alpha}$$

já que

$$\sum_{j=1}^J \Delta_j = 0$$

assim sendo

$$S_{kr} = \sum_{j=1}^J J^{-1} \left[\frac{\alpha^{n-1}}{\Gamma(n)} J \Delta_j \right]^2 = \left[\frac{\alpha^{n-1}}{\Gamma(n)} \right]^2 J \sum_{j=1}^J \Delta_j^2 \quad (2.6)$$

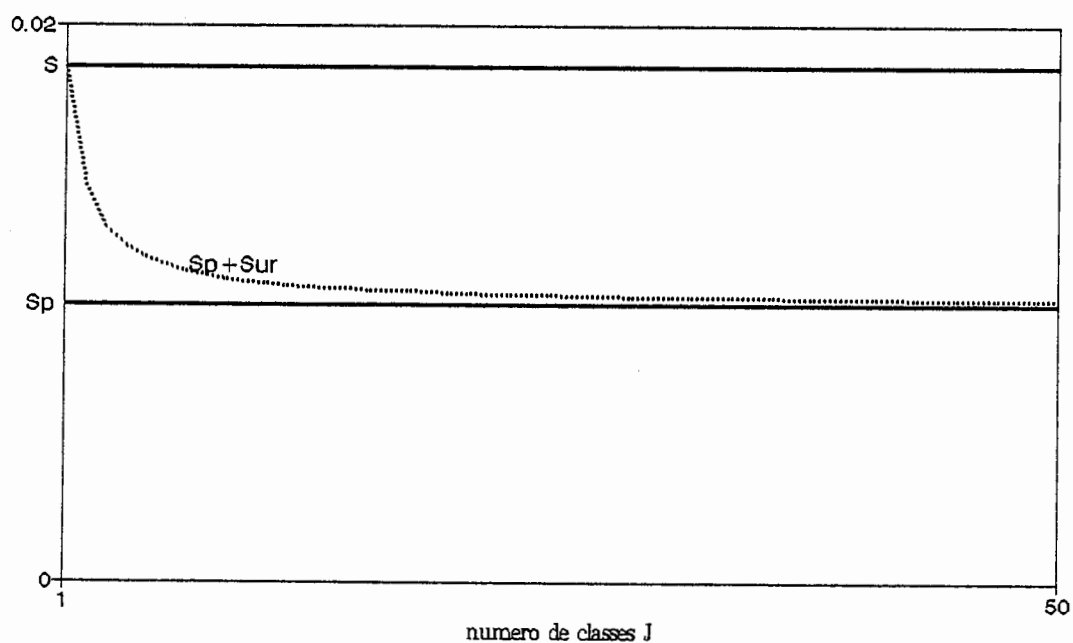
Quadro 2.2 - Variação da informação disponível

classes	S_p ¹	S_{kr} ¹	S_{ur} ¹	S_{kr}/S_r ²
1	100	0.0	85.0	0.00
2	100	42.5	42.5	49.99
3	100	56.8	28.2	66.84
4	100	63.9	21.1	75.19
5	100	68.2	16.8	80.21
6	100	71.1	13.9	83.65
7	100	73.1	11.9	85.96
8	100	74.6	10.4	87.72
9	100	75.8	9.2	89.13
10	100	76.7	8.3	90.20

1 valores multiplicados por 10^4

2 em percentagem

Gráfico 2.1 - Variação da informação disponível



Em termos numéricos, utilizaram-se valores admissíveis para os parâmetros da distribuição estrutural, tendo-se optado por $n = 1.17647$ e $\alpha = 11.7647$ (ver *Andrade e Silva* [1988] para uma melhor explicação) o que permite construir o quadro 2.2 que ilustra a evolução das diferentes componentes da variância do risco. A última coluna do quadro salienta a relação entre a parte da variância que permanece desconhecida e a variância atribuível ao risco quando a informação disponível cresce, isto é com o aumento do número de classes.

Esta evolução também se vê claramente no gráfico 2.1 onde se consideraram as situações em que se consegue efectuar uma partição da carteira até 50 classes. Relembre-se que a situação onde Θ é observável corresponde a existirem infinitas classes, caso em que $S_{ur} = 0$. Como se vê no gráfico, caminha-se muito rapidamente para uma situação em que S_{ur} se aproxima muito do valor 0.

2.3. Possíveis consequências da não utilização da informação relevante

Quando a tarifa inclui todos os elementos significativos de que se dispõe, a situação, pese embora uma maior ou menor solidariedade, será transparente na medida em que, com a informação disponível, as apólices têm um grau de risco penalizado, em termos médios, pelo valor do prémio ⁸.

Ao invés, a não inclusão de elementos significativos na tarifa, mesmo que só efectuem uma avaliação indirecta de outros factores, pode ter repercussões significativas.

De facto, ao omitir informação relevante na variável A , está-se a criar, num mesmo escalão tarifário, riscos que se sabe à partida serem melhores ou piores o que pode conduzir a grandes distorções no mercado se houver por parte de uma seguradora uma política deliberada de angariação dos "bons" riscos. Nalguns casos existem mesmo mecanismos de compensação entre seguradoras quando a proibição

⁸Tenha-se em consideração que se está a trabalhar com o prémio puro, isto é que se admite a neutralidade da empresa perante o risco.

de recorrer a certos factores provem da autoridade de controle, podendo citar-se o caso holandês no que se refere a alguns seguros de doença.

Esta situação deve levar a certas cautelas na determinação dos factores a excluir, sendo necessário efectuar uma análise aos eventuais custos envolvidos por forma a evitar grandes desequilíbrios. Saliente-se no entanto que os mecanismos de bonus/malus no seguro automóvel tendem a diminuir estes efeitos já que, penalizando os piores riscos, irão minorar eventuais distorções oriundas de uma informação incompleta.

Sublinhe-se uma vez mais que as motivações para a não consideração de certos elementos variam no tempo, sendo pacífica a não inclusão em determinado momento, de variáveis que noutro contexto não levantariam problemas de inclusão. A variável idade do condutor por exemplo pode ser um bom exemplo se atendermos ao caso holandês onde, nos últimos anos, sofreu um processo de alternância entre inclusão e exclusão nas tarifas em vigor.

Como atrás se referiu, parece pacífica, em Portugal e no momento actual, a não utilização de variáveis como a raça, o sexo ou o credo religioso (mesmo que se verifiquem correlações estatísticas significativas), sendo mais polémico, por exemplo, o tratamento a dar a certos grupos etários (relembre-se o caso holandês de que se falou anteriormente) ou a aplicação de eventuais penalizações regionais se forem contra as expectativas que se têm à priori. Na discussão dos vectores orientadores de uma nova tarifa retomar-se-á esta discussão com base nos resultados que se irão obter.

Parece por fim importante lembrar a necessidade de uma leitura cuidada dos resultados, por mais sofisticada que seja a metodologia estatística utilizada, antes de implementar uma estrutura tarifária que deverá obedecer a requisitos mais latos entre os quais se destaca:

- estabilidade no médio prazo no que toca aos factores seleccionados, e as penalizações relativas a aplicar.
- simplicidade na aplicação da tarifa, por forma a ser compreendida pelos segurados.

- aceitabilidade em termos de senso comum da generalidade dos factores e do sentido da penalização/beneficiação.
- comportamento em termos de mercado, factor para o qual se deve ter em conta aspectos como o marketing e a reação da concorrência.

A análise estatística surge assim como uma base de informação indispensável para que o decisor possa ponderar a acção a tomar, quantificando os custos e benefícios inerentes a tal decisão.

3. Indemnizações e Responsabilidade

Em Portugal, como na generalidade dos países europeus, a jurisprudência que rege as relações entre intervenientes num sinistro e entre estes e as suas companhias seguradoras, baseia-se na noção clássica de direito das responsabilidades, isto é estabelecem-se as responsabilidades dos diversos elementos envolvidos que vão determinar as indemnizações a serem pagas pelas seguradoras.

Se um tal processo é pacífico, e talvez mesmo inquestionável num contexto europeu, ele foi objecto de um amplo debate na América do Norte (Estados Unidos e Canadá), tendo o conceito de culpa sido revogado, pelo menos parcialmente, em numerosos estados. Esta secção destina-se a ilustrar este novo conceito, aproveitando-se esta discussão para equacionar os problemas inerentes às visões tradicionais a que se procurou dar resposta com a introdução deste conceito.

Numa resenha bastante clara, *Kimball* [1985] traça uma panorâmica da evolução do enquadramento legal no qual se move o seguro automóvel, sublinhando os aspectos fundamentais que conduziram ao aparecimento do seguro de responsabilidade civil compulsivo e nas alterações que este facto induziu nos processos jurídicos associado à sinistralidade automóvel.

De facto a multiplicidade e a gravidade dos casos bem como a presença de uma entidade solvente, a companhia seguradora, transformaram o processo legal de litígio entre particulares para simples estabelecer das compensações adequadas

que ficam a cargo da entidade solvente. Este processo pode considerar-se como tendo plena validade em Portugal já que a evolução dos capitais mínimos a segurar em responsabilidade civil originou, e continua a originar, um acréscimo sensível nas compensações atribuídas por responsabilidades semelhantes ao longo dos últimos anos ⁹.

Desenvolveu-se assim no direito americano a ideia de que o binómio compensação de prejuízos / determinação exacta das responsabilidades, que tantas vezes se encontra em tensão deveria ser substituído por um conceito mais economicista em torno da optimização da aplicação dos recursos envolvidos, tendo surgido no início da década de 70 os primeiros sistemas de responsabilidade civil para o seguro automóvel baseada no conceito de "no fault".

Na sua essência, um seguro baseado neste conceito promove o pagamento de todas as reparações por danos corporais sofridos num sinistro sem atender a responsabilidades. Em troca as vítimas não podem accionar processos de culpa nem obter compensações por sofrimento e dor. Com estas limitações pretende-se reduzir os custos associados ao processo, respondendo cada seguradora pelos danos sofridos pelo condutor e passageiros do veículo do seu segurado e pelos peões envolvidos se os houver.

Witt & Urrutia [1983] sublinham que só em casos extremos se tem sistemas puros de "no-fault" sendo bastante mais frequente a existência de situações mistas (naquela data apenas 3 dos 24 estados que tinham adoptado esta filosofia tinham sistemas próximos do paradigma). Refira-se também que este tipo de sistemas necessita duma imposição por parte da autoridade de controle para além de só parecer aplicável quando compulsivo.

Surgiram nos últimos anos inúmeros artigos em revistas norte-americanas que se debruçam sobre as vantagens e inconvenientes destes sistemas face à visão tradicional (cite-se por exemplo *Kochanowski & Young* [1985], *Outreville & Helie* [1986], *Rolph & al* [1985] ou ainda *Zador & Lund* [1986]), não existindo concordância

⁹No campo da relação entre os pagamentos por danos corporais em responsabilidade civil e o capital seguro veja-se o estudo de *Klugman & Murray* [1984], cujo interesse ultrapassa o âmbito no qual ele se desenrola.

nas conclusões tiradas quanto ao facto de saber se este novo sistema diminui ou não a sinistralidade.

Assinale-se também que com este sistema surgiram algumas propostas de substituição parcial dos prémios a pagar às seguradoras por uma espécie de fundo comum que seria utilizado em certos casos existindo propostas de financiamento bastante originais para este, sendo a mais original a de *Roach* [1983] que defende a inclusão de parte do prémio no preço da gasolina.

Não sendo intensão deste trabalho propor o estabelecimento de um tal sistema já que a sua viabilidade seria desde logo muito discutível por ir contra noções de direito muito profundas na Europa ¹⁰, não se quis deixar de introduzir este tema de reflexão que, no fundo, mais não faz do que levar a uma outra dimensão uma prática corrente das seguradoras para pequenos sinistros. Refira-se ainda que o conceito de “no-fault” é mais ou menos pacífico noutros ramos da actividade seguradora nomeadamente nos seguros de acidentes de trabalho.

¹⁰ Assinale-se no entanto que em *Soares* [1980] se refere um estudo de Jorge Sinde Monteiro intitulado *Reparação dos danos em acidentes de trânsito- Um estudo de direito comparado sobre a substituição da Responsabilidade Civil por um novo seguro de acidentes de trânsito*, onde este autor defende a instauração de um sistema do tipo “no-fault” (para mais pormenores ver a separata ao volume XIX do suplemento do Boletim da Faculdade de Direito da Universidade de Coimbra), mas trata-se de uma posição marginal face à jurisprudência dominante.

Capítulo 3

Introdução às Metodologias de Construção de Tarifas

As metodologias de construção e análise das tarifas elaboradas para o seguro automóvel conheceram uma evolução significativa nos últimos trinta anos, processo cujo desenrolar se deveu a três razões fundamentais:

- Grande desenvolvimento do parque automóvel e consequente aumento nas taxas de sinistralidade já que a estrutura viária não acompanhou de imediato aquela explosão. Outra consequência importante deste crescimento foi o peso crescente do seguro automóvel na actividade seguradora, fruto também da generalização da obrigatoriedade do seguro de responsabilidade civil, o que levou as companhias a dar-lhe uma importância ainda maior.
- Grandes flutuações nas taxas de lucro do ramo pelo facto das tarifas não acompanharem bem as características dos riscos e por haver uma forte pressão dos segurados e muitas vezes das autoridades no sentido de travarem crescimentos indiscriminados nos prémios cobrados pelas seguradoras.
- Rápido desenvolvimento tecnológico, com a generalização das tecnologias da informação, o que permitiu manusear e estudar em profundidade grandes volumes de dados. Esta componente encontra-se presente no debate teórico

no seio dos actuários que se desenvolveu a partir dos anos 60 e, claro está, nas respostas que foram surgindo.

Passou-se assim das tarifas elementares que existiam nos anos 50 para sistemas bastante mais sofisticados e variados podendo-se no entanto reagrupar as principais metodologias em duas famílias. Por um lado, os sistemas de maior implantação prática e que surgem como herdeiros naturais das tarifas dos anos 50, que se designarão por "clássicos" e por outro aqueles que têm origem nas metodologias oriundas da teoria da credibilidade, cuja aplicação, embora se encontre geograficamente muito limitada, têm grande aceitação nalguns países, como é o caso da escandinávia, e conhecem desenvolvimentos recentes particularmente interessantes.

Em termos metodológicos, após a definição genérica dos objectivos que se pretendem atingir com a tarifa, ter-se-á de efectuar um primeiro desenho do modelo a implementar. Tratar-se-á de tomar opções fundamentais no domínio da escolha da variável objectivo (frequência, custos associados às participações ou estrutura mista), da identificação do conjunto de possíveis factores a incluir e da estrutura de modelo a utilizar.

Esta fase de modelização será desenvolvida muito em função da opção feita em termos da metodologia a utilizar, se bem que existam preocupações comuns às duas abordagens como sejam a escolha do indicador de sinistralidade, o conjunto dos factores candidatos à inclusão, etc...

Numa primeira secção discutem-se alguns problemas genéricos independentes da abordagem escolhida, para seguidamente se apresentar, em outras tantas secções, as duas principais filosofias de construção de tarifas.

1. Modelização da tarifa

O primeiro ponto a definir será o objectivo inerente à tarifa que se estabelece geralmente como a procura da maior adequação entre o prémio e o grau de risco

envolvido na apólice. Para tal é habitual utilizar-se como variável objectivo o montante de indemnizações esperadas que cada risco vai originar no período onde vigora o seguro, procurando-se a relação entre este elemento e as diferentes características próprias a cada apólice ou cada grupo de apólices ¹.

Seleccção das variáveis exógenas Se em ramos mais homogéneos da actividade seguradora tais elementos são facilmente identificáveis conduzindo a colectivos amplos e estáveis com características semelhantes, já no ramo automóvel existem numerosos problemas no estabelecer dos factores relevantes, entre os quais se destaca o facto de se proceder muitas vezes a medições indirectas das causas explicativas da sinistralidade, facto que pode gerar situações bem diferentes. Refira-se como exemplo que, se parece natural traduzir o desgaste dum veículo pelos quilómetros já percorridos (quando se trata de um factor disponível) ou pelo seu ano de fabrico já uma avaliação pelo tipo de combustível utilizado seria mais discutível (existindo no entanto uma correlação significativa entre o número de quilómetros percorridos anualmente e o tipo de combustível utilizado) para não falar dos problemas inerentes à medição de fenómenos como a prudência dos condutores para os quais é muito difícil, senão impossível, definir medidas objectivas directas.

Por outro lado é necessário ter presente que a variável endógena é composta, isto é pode traduzir-se como a junção de dois elementos diferentes, o primeiro ligado à frequência de sinistralidade e o segundo ao custo de cada sinistro, podendo existir factores explicativos diferentes para cada uma destas componentes.

O tratamento desta fase preliminar constitui um bom exemplo da interdisciplinaridade inerente à construção de tarifas, sendo necessário agregar aos conhecimentos técnicos sobre a sinistralidade, que permitem equacionar as possíveis causas

¹Também são correntes estudos com base na frequência de sinistralidade. Tal situação pode dever-se a limitações nos dados disponíveis ou à eventual independência entre o número de participações e o custo médio de cada uma delas.

Tenha-se ainda presente que, enquanto os dados em frequências são conhecidos pouco depois do fim de cada período, já o mesmo não se passa com os custos que estarão durante bastante tempo dependentes de valores estimados.

e conseqüentemente definir algumas variáveis mensuráveis que possam contribuir para a sua explicação, mesmo que apenas parcial, noções estatísticas rigorosas uma vez que a base de dados a construir irá inevitavelmente enquadrar toda a análise que será desenvolvida posteriormente.

Como acontece com alguma frequência no campo da estatística aplicada ou da econometria, existem desde logo duas formas extremas de proceder ²:

- Formular, em termos de relações de causa a efeito, o conjunto de modelos que se pensa serem aceitáveis e subordinar a base de dados a esta formulação prévia.
- Construir uma base com todos os dados disponíveis (e que se relacionem com a problemática em causa), seguindo-se a filosofia de deixar plena liberdade aos dados o que, em termos estatísticos, se irá traduzir num procedimento passo a passo na escolha dos factores a incluir, sem o constrangimento de uma formulação inicial.

Os defensores da segunda linha terão desde logo de optar por uma metodologia de selecção, o que nem sempre é pacífico, mesmo tendo em conta que existe unanimidade em torno da necessidade de proceder de forma conjunta por forma a considerar as interacções entre as diferentes variáveis exógenas.

Enquanto alguns defendem algoritmos que não tenham em conta a estrutura que se irá adoptar para o modelo, numa visão muito hierarquizada das diferentes etapas do processo, outros pugnam por um procedimento mais integrado, defendendo uma selecção dirigida para o modelo a adoptar.

Em termos dos algoritmos disponíveis, destaca-se no primeiro grupo o processo proposto por *Hallin* [1977], e desenvolvido em *Hallin & Ingenbleek* [1981], sendo o segundo grupo baseado essencialmente nos desenvolvimentos do modelo

²A opção entre estes extremos dependerá sempre do grau de conhecimento que se tenha sobre o fenómeno em estudo bem como dos dados disponíveis, ou seja quanto mais se conheça o fenómeno ou quanto menos informação disponível se tenha, maior será a tendência em seguir a primeira via.

de regressão linear múltipla (*Lemaire* [1985] nomeadamente) na sua vertente passo a passo, podendo-se generalizar este processo com base nos modelos lineares generalizados (um exemplo pode ser visto em *Baxter & al* [1980]).

Construção de classes Se nos factores explicativos da sinistralidade se podem encontrar diferentes tipos de variáveis, muitos autores defendem que se trabalhe dividindo o colectivo em células resultantes do cruzamento dos diferentes factores. Tal imposição resulta não só de necessidades próprias a alguns métodos de estimação mas também da visão do colectivo como sendo formado por um conjunto de sub-grupos que, tendo um maior grau de homogeneidade interna, não deixam de manter laços profundos uns com os outros.

Sublinhe-se aliás que alguns elementos pacificamente aceites como variáveis a incluir no modelo são traduzidos por variáveis discretas medidas numa escala nominativa, isto é, em que o valor atribuído a cada variável tem apenas efeito descritivo (as variáveis regionais constituem um bom exemplo deste tipo de factores).

Neste contexto torna-se por vezes necessário reagrupar algumas células por forma a não obter populações que pela sua dimensão em cada célula possam inviabilizar o recurso às técnicas estatísticas. Estes reagrupamentos podem ser feitos de forma apriorística ou impostos por razões não directamente modelizadas (estrutura administrativa numa análise regional por exemplo) ou ainda ter origem numa análise dos dados para os adeptos da filosofia de plena liberdade para os dados. Se existem numerosos exemplos do primeiro tipo de enquadramento (*Lemaire* [1985] ou *Sture* [1987] entre outros), já o segundo é bastante menos frequente na medida onde os modelos a construir têm bastantes restrições na apresentação dos resultados, tendo em conta as suas ligações com outras vertentes da estratégia da empresa (marketing por exemplo), eventuais imposições legais ou até critérios de aceitabilidade social. Podem no entanto referir-se as abordagens pela análise em "clusters" (veja-se *van Eeghen & al* [1983] ou *Loimaranta & al* [1980]), que cobrem diferentes variantes destes métodos.

Coerência das estimativas A coerência das estimativas, sendo um problema de difícil formalização em termos meramente estatísticos, não pode no entanto deixar de estar presente em qualquer aplicação que venha a ser desenvolvida.

Para além dos testes estatísticos inerentes à qualidade das estimativas obtidas no modelo, e que serão próprios a cada uma das metodologias utilizadas, está-se a pensar em factores como a admissibilidade em termos práticos dos valores obtidos (não será por exemplo aceitável que um segurado com 20 anos de idade pague por este facto um prémio 3 vezes superior ao de um segurado com 21 anos), a progressão entre classes de um mesmo factor (retomando o exemplo anterior não será de admitir que quando a idade cresça ora se tenha desconto ora se verifique agravamento no prémio) ou variações que vão contra o sentido das relações causa a efeito estabelecidas previamente e cuja origem poderá residir num efeito conjugado com outros factores incluídos.

Este ponto, se bem que insuficientemente desenvolvido na literatura especializada (talvez por escapar ao instrumental habitual), é extremamente importante. *Sundt* [1987] desenvolve aliás, no âmbito da aplicação dos modelos hierárquicos de regressão (ver secção 3.2 deste capítulo), comentários de muito interesse quando discute a criação de novas variáveis por junção de factores primários (naquele caso tratava-se de construir uma variável traduzindo a potência por peso do veículo).

2. Abordagem “clássica”

Como herdeira directa dos sistemas iniciais de construção de tarifas, esta metodologia foi incorporando diversos contributos que surgiram desde então e foi adaptada às situações reais mais diversas. A contrapartida mais significativa para tal versatilidade reside numa deficiente unidade e integração deste tipo de abordagens, formulando-se mais como uma série de módulos com maior ou menor interligação do que como um corpo teórico devidamente estruturado.

A grande fronteira que se estabelece desde logo destina-se a separar dois tipos de informação. Por um lado os dados que possam ser conhecidos *à priori*, isto é

que se referem a características independentes do tempo de observação a que se submeteu a apólice. Exemplos deste tipo de informação serão variáveis referentes ao condutor habitual do veículo a segurar (idade, sexo, morada, profissão ...), ao próprio veículo (cilindrada, ano de fabrico, potência...), ou ao uso que dele é feito (quilometragem percorrida anualmente, utilização profissional,...).

O segundo tipo de informação consiste nos elementos inerentes a cada segurado em si mesmo e que só se irão definindo, quase sempre de forma indirecta, à medida que se observe o comportamento deste mesmo segurado ao longo de vários períodos. Em termos práticos esta informação costuma resumir-se ao número de participações feitas à seguradora e eventualmente aos custos associados às mesmas durante a permanência da apólice na carteira. Sendo certo que existe um elevado grau de aleatoriedade na ocorrência ou não de sinistros que induzam as respectivas participações, o fundamento utilizado para justificar a inclusão deste tipo de elementos na tarifa reside na não observabilidade directa de alguns factores indiscutivelmente relevantes para a determinação do risco como sejam a perícia do condutor, a sua prudência, etc..., admitindo-se que a observação das ocorrências passadas possa de alguma forma traduzir estes elementos.

A ideia base seria assim penalizar as apólices que registem participações (agravamento esse que, conforme adiante se verá, pode assumir formas e montantes bem diferentes) face àquelas que correspondem a segurados que não as induzam, critério que para além das justificações teóricas que possa suscitar corresponde, em termos das seguradoras, a um instrumento bastante útil na passagem dos pequenos sinistros para a responsabilidade dos segurados bem como a incentivar estes a uma prudência acrescida já que as participações têm repercussões no prémio a pagar.

Se bem que existam algumas tentativas de tratamento simultâneo destes dois tipos de informação, nomeadamente na fase de estimação dos parâmetros definidores da tarifa (veja-se por exemplo *van Eeghen & al* [1982] ou *Andrade e Silva* [1989]) estas não deixam de ser bastante limitadas quer em número quer sobretudo no seu grau de ambição por não se tratar tanto de uma modelização conjunta mas sim de uma fusão, na fase final de estimação, entre dois processos

autónomos.

De facto o sistema de bonus é determinado de forma autónoma (ou recorre-se ao sistema em vigor sem discutir este aspecto essencial de qualquer tarifa), apenas se estimando de forma conjunta os descontos/agravamentos a impor (quer pelas características objectivas quer pelas ocorrências passadas) para evitar situações de dupla penalização. Uma introdução à problemática inerente aos sistemas de bonus é desenvolvida na secção 2.2 retomando-se a discussão no capítulo 5 onde se irá proceder a uma análise mais pormenorizada destes sistemas.

2.1. Os factores mensuráveis à priori

Neste campo, a grande inovação dos anos 60 consistiu na passagem de uma análise em termos marginais, isto é relacionando de forma separada cada uma das variáveis explicativas com a sinistralidade observada, e com grande preponderância dos tratamentos subjectivos, para uma visão integrada onde se estabelece uma melhor fundamentação da análise estatística.

Os modelos de *Almer* [1957] e de *Bailey & Simon* [1960] constituíram as primeiras abordagens globais na estimação da tarifa, problemática que conheceu no decorrer daquela década grande discussão tendo surgido outros contributos que se apresentarão seguidamente.

Nos anos 70 e 80 a discussão alargou-se às metodologias de selecção de variáveis quer recorrendo a procedimento próprios (*Hallin* [1977], *Hallin & Ingenbleek* [1981] por exemplo) quer integrando esta tarefa no processo de estimação com recurso a uma análise passo a passo (*Lemaire* [1985]). A última novidade nesta família consistiu na aplicação dos modelos lineares generalizados, metodologia definida por *Nelder & Wedderburn* [1972] mas que só no meio dos anos 80 começou a ser plenamente aplicada neste ramo de actividade.

A razão básica que retardou a formalização e aplicação dos algoritmos de selecção de variáveis, tarefa que se situa, dum ponto de vista lógico, antes da estimação da tarifa foi, sem qualquer dúvida, as limitações na capacidade de cálculo e de armazenamento de informação dos meios informáticos, já que esta fase é não

só extremamente pesada dum ponto de vista computacional como exige também uma recolha prévia de abundante informação referente às apólices.

Apresentam-se, embora sumariamente, algumas destas técnicas, omitindo-se os modelos lineares generalizados que, pela importância que irão assumir neste trabalho, serão objecto do próximo capítulo.

2.1.1. Alguns métodos para estimação dos parâmetros

A apresentação será feita pressupondo um modelo composto apenas por factores, isto é por variáveis discretas medidas numa escala nominativa, caso em que se pode considerar o universo das apólices como sendo composto por uma partição em R células resultando das diferentes combinações possíveis para os factores. A razão de tal hipótese assenta por um lado no facto destes algoritmos terem sido concebidos para este tipo de modelos e por outro na constatação que, no seguro automóvel, esta situação se verifica em todos os casos práticos.

Suponha-se então um modelo com 2 factores explicativos³, sendo os parâmetros referentes ao primeiro factor representados por a_i ($i = 1, \dots, I$) e os do segundo por b_j ($j = 1, \dots, J$) sendo

$$s_{ij} = f(a_i, b_j) \quad (3.1)$$

onde s_{ij} representa o valor médio da variável endógena (sinistralidade, participações, ...) na célula (i, j) , podendo a função $f(\cdot)$ ter uma componente aleatória.

Os contributos mais significativos que foram surgindo com vista à estimação de s_{ij} assentam basicamente em duas formas funcionais, a saber uma estrutura aditiva do tipo

$$s_{ij} = a_i + b_j + e_{ij} \quad (3.2)$$

ou multiplicativa com

$$s_{ij} = a_i b_j + e_{ij} \quad (3.3)$$

³Esta hipótese destina-se apenas a simplificar a apresentação uma vez que a generalização para um maior número de factores apresenta-se de forma bastante óbvia.

onde e_{ij} traduzirá o erro associado à avaliação já que não se tratam de modelos exactos. No caso da estrutura multiplicativa também se deve referir que existem outras alternativas para a incorporação do erro. Tenha-se também presente que as formulações (3.2) e (3.3) podem ser expressas em termos relativos isto é

$$\begin{cases} s_{ij} = s_0 + \alpha_i + \beta_j + e_{ij} \\ \text{ou ainda} \\ s_{ij} = s_0 \alpha_i \beta_j + e_{ij} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde s_0 representará a sinistralidade média no conjunto da população, traduzindo agora os α_i e β_j as variações relativas com origem nos diferentes factores. Tal passagem mais não faz do que traduzir o facto de existir um grau de liberdade nas estimativas, isto é apenas se necessita estimar $(I + J - 1)$ parâmetros, sendo o último determinado por normalização das estimativas.

Sublinhe-se ainda que a qualidade dos estimadores obtidos por cada um dos processos que se vão apresentar depende, em boa medida, das hipóteses que se postulem na formulação do modelo, salientando-se que, nalguns casos particulares, estas metodologias podem ser vistas como casos particulares de famílias mais amplas de estimadores, nomeadamente dos estimadores de máxima verosimilhança que se irão utilizar, no contexto mais geral dos modelos lineares generalizados.

Método de Bailey & Simon *Bailey & Simon* [1960] tratam os dois modelos definidos em (3.4), procurando os estimadores que minimizam

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij} \frac{(s_{ij} - \hat{s}_{ij})^2}{\hat{s}_{ij}} \quad (3.5)$$

em relação aos parâmetros que originam \hat{s}_{ij} , sendo o número de elementos na célula (i, j) representado por n_{ij} e mantendo-se a convenção habitual de indicar os estimadores com o símbolo $\hat{\cdot}$.

A razão básica que fundamenta, na óptica destes autores, esta metodologia prende-se com o facto de Q poder ser interpretado como tendo distribuição do χ^2 o que ligaria estes estimadores à família dos estimadores do χ^2 mínimo. Tal facto não é porém verdade no caso geral, já que apenas se verifica quando se trabalha

com uma estrutura multiplicativa, admitindo-se que cada célula apenas influencia a frequência de sinistralidade que se supõe seguir uma lei de Poisson, assumindo os custos dos sinistros uma mesma distribuição em todas as células.

Em termos computacionais, a solução dependerá da estrutura do modelo e conduz a um sistema de equações não lineares cuja resolução pode ser abordada, nos casos habituais, pelo algoritmo de Newton-Raphson. Saliente-se que a rapidez de convergência do processo depende em boa medida da escolha do ponto inicial, como é vulgar nestes casos.

Método das distribuições marginais Esta abordagem pelas distribuições marginais ("marginal totals") foi introduzida por *Bailey* [1963] e retomada por *Jung* [1968] e consiste em procurar, para grupos importantes de apólices, prémios aproximadamente iguais à sinistralidade média do grupo. Este método garante esta igualdade para os valores das distribuições marginais referentes a cada variável. Para tal resolve-se o sistema de equações

$$\begin{cases} \sum_j n_{ij} \hat{s}_{ij} = \sum_j n_{ij} s_{ij} \\ \sum_i n_{ij} \hat{s}_{ij} = \sum_i n_{ij} s_{ij} \end{cases} \quad (3.6)$$

mantendo-se as convenções do caso anterior. A solução deste sistema também será obtida de forma iterativa se bem que a literatura refira uma convergência rápida.

Método de Sant *Sant* [1980], inspirando-se nos mínimos quadrados ponderados, procede à minimização de

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij} (s_{ij} - \hat{s}_{ij})^2 \quad (3.7)$$

o que conduz, à semelhança dos casos anteriores, a um processo iterativo (mantêm-se, uma vez mais, as convenções anteriores no que respeita aos estimadores).

Chang & Fairley [1979], ao tratarem os modelos multiplicativos, recorriam a um modelo loglinear isto é partiam da definição de

$$s_{ij} = a_i b_j e_{ij}$$

linearizando a expressão pela passagem aos logarítmos

$$r_{ij} = \ln(s_{ij}) = \ln(a_i) + \ln(b_j) + \ln(e_{ij})$$

após o que utilizam o método dos mínimos quadrados ponderados. Como se depreende, está-se a admitir implicitamente uma distribuição lognormal para a sinistralidade, sobretudo se se recorrer aos testes estatísticos habituais sobre o modelo transformado.

Por outro lado *Chang & Fairley* [1979] também mostraram, retomando aliás um debate iniciado por *Bailey & Simon* [1960], que a estrutura multiplicativa tende a sobrestimar os riscos mais gravesos.

Outras formulações Para além destes métodos que utilizam formas funcionais puras para a função $f(\cdot)$, existem outras abordagens, se bem que com menor projecção em termos de aplicações práticas.

Entre estas sublinham-se as abordagens que para além dos efeitos directos dos factores recorrem às interações entre eles, de forma total ou parcial, cujo enquadramento pode conduzir a formulações mistas. Para além desta discussão também existem propostas mais elaboradas como a forma híbrida proposta por *Du Mouchel* [1983] ou as formulações de *Harrington* [1986] baseadas nas transformações de *Box & Cox* [1964] ou ainda a abordagem de *Tomberlin* [1988].

O principal ponto de discordia pode no entanto situar-se no recurso ou não às interacções entre factores, existindo numerosos estudos neste domínio, se bem que não sejam concordantes. Alguns (*Du Mouchel* [1983], *Harrington* [1986] ou *Stroinski* [1987] por exemplo) defendem a inclusão destas por conduzir a melhores estimações enquanto outros (*Seal* [1968] ou *Baxter & al* [1980] entre outros) defendem que elas não são significativas. Como parece evidente, as conclusões a tirar estarão intimamente ligadas aos dados em estudo para além de serem necessárias algumas precauções na forma de tirar estas mesmas conclusões já que a inclusão das interacções origina um número de parâmetros acrescido conduzindo por isso a um ajustamento melhor em termos absolutos, independentemente da significância das interacções.

Cite-se ainda o curioso estudo de *Freifelder* [1986] que discute a escolha da forma funcional com base naquela que induz um menor erro nas estimativas no caso de uma má opção. Para além disso refira-se também o trabalho de *Jee* [1989] onde se apresenta uma síntese que embora muito breve não deixa de ser muito completa no que toca as diferentes formas funcionais utilizadas.

2.1.2. A selecção de variáveis: O método de Hallin & Ingenbleek

Esta metodologia tem por objectivo determinar, dentro duma ampla base de dados, as variáveis que se poderão considerar como relevantes para definir a sinistralidade tendo portanto propósitos bem diferentes dos que estão subjacentes às outras metodologias. Dada a clareza da exposição desta metodologia em *van Eeghen & al* [1983], seguir-se-á basicamente este texto.

O ponto de partida consistirá em dicotomizar todas as variáveis candidatas a serem consideradas explicativas da sinistralidade, isto é apenas se vai trabalhar com variáveis binárias, dividindo-se também as apólices em “boas” e “más” sendo o critério proposto o terem ou não originado participações no período em análise.

A transformação dos factores explicativos em elementos binários levanta no entanto dois problemas diferentes que no entanto assentam ambos na necessidade de não permitir um crescimento das variáveis em estudo para além de limites aceitáveis.

O primeiro consiste na representação de uma variável contínua por um conjunto de variáveis binárias processo onde necessariamente se terá de recorrer a algumas simplificações, procurando-se um compromisso entre não limitar seriamente a informação disponível e não exagerar, como já se referiu, no número de elementos em análise.

O segundo tipo de dificuldade pode surgir no tratamento de variáveis nominais cuja transformação pode exigir algumas simplificações que consistirão em não criar todos os contrastes possíveis para não originar um número incomportável de variáveis. No tratamento de um factor como o estado civil do segurado, partindo

das 4 situações habituais (solteiro, casado, divorciado, viúvo), obtêm-se 7 alternativas possíveis (já que se poderão considerar combinações de situações do tipo solteiros e casados versus divorciados e viúvos) que correspondem a outras tantas variáveis binárias enquanto que, partindo de 10 alternativas iniciais se obtêm 511 alternativas⁴. Tal limitação é própria desta metodologia onde se recusa qualquer modelização, já que no quadro de um modelo partir-se-ia apenas dos níveis primários (4 no exemplo), estimando-se os parâmetros envolvidos e testando-se a igualdade das estimativas numa segunda fase.

Uma vez feita a transformação de todos os factores em variáveis binárias, inicia-se o procedimento de Hallin e Ingenbleek que consiste numa análise passo a passo ("stepwise") com recurso a um teste estatístico que tire partido da situação criada.

O teste estatístico utilizado Suponha-se então, sem perda de generalidade, que se tinham incluído as K primeiras variáveis explicativas, X_1, X_2, \dots, X_K , utilizando-se as letras minúsculas para representar os resultados obtidos com as variáveis correspondentes (como é evidente, $x_i \in \{0, 1\}$). Neste quadro define-se:

$m(1, 2, \dots, K)$ número de células não vazias criadas pelas variáveis X_1, X_2, \dots, X_K (como é evidente $m \leq 2^K$).

$n(x_1, x_2, \dots, x_K)$ número de observações na célula definida por $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_K = x_K$.

⁴Seja N o número de características, definindo-se n_1 como o maior inteiro inferior a $N/2$. Neste caso o número de situações possíveis será:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \binom{N}{i} + R$$

sendo

$$R = \begin{cases} 0 & N \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2} \binom{N}{n_1 + 1} & N \text{ par} \end{cases}$$



$n_0(x_1, x_2, \dots, x_K)$ número de observações na célula anterior que não originaram participações.

$n_1(x_1, x_2, \dots, x_K)$ idem mas originando 1 ou mais participações.

$p_0(x_1, x_2, \dots, x_K)$ probabilidade teórica de não ocorrerem participações na célula.

$p_1(x_1, x_2, \dots, x_K)$ probabilidade teórica de ocorrerem participações na célula.

$\hat{p}_0(x_1, x_2, \dots, x_K)$ estimativa de $p_0(x_1, x_2, \dots, x_K)$ dada por $\frac{n_0(x_1, x_2, \dots, x_K)}{n(x_1, x_2, \dots, x_K)}$

$\hat{p}_1(x_1, x_2, \dots, x_K)$ estimativa de $p_1(x_1, x_2, \dots, x_K)$ dada por $\frac{n_1(x_1, x_2, \dots, x_K)}{n(x_1, x_2, \dots, x_K)}$

Quando se introduz uma variável adicional, seja X_{K+1} , cada uma das m células já existentes vai potencialmente ser dividida em duas novas células. Seja então $l(K+1|1, 2, \dots, K)$ o número de células que foram realmente divididas, isto é que originaram dois sub-grupos não vazios.

Querendo avaliar até que ponto X_{K+1} introduz uma discriminação efectiva, e fundamentando o teste na filosofia de Neyman-Pearson, estabelecer-se-á como hipótese nula que a nova variável não acrescenta nada à discriminação em vigor, ou seja

$$H_0 : p_0(x_1, x_2, \dots, x_K, 0) = p_0(x_1, x_2, \dots, x_K, 1)$$

em todas as células (x_1, x_2, \dots, x_K) que sofreram uma divisão efectiva, sendo a hipótese alternativa constituída por existir uma célula para a qual essas probabilidades sejam diferentes. O critério de admissibilidade é assim bastante lato.

Para definir o teste, considera-se $n_0(x_1, x_2, \dots, x_K, x_{K+1})$ como realização de uma variável aleatória de distribuição binomial de parâmetros

$$N = n(x_1, x_2, \dots, x_K, x_{K+1}) \quad \text{e} \quad p = p_0(x_1, x_2, \dots, x_K, x_{K+1})$$

ou seja utiliza-se a estatística

$$\Phi = \sum \left\{ \left[\hat{p}_0(x_1, x_2, \dots, x_K, 0) - \hat{p}_0(x_1, x_2, \dots, x_K, 1) \right]^2 \frac{n(x_1, x_2, \dots, x_K, 0) n(x_1, x_2, \dots, x_K, 1) n(x_1, x_2, \dots, x_K)}{n_0(x_1, x_2, \dots, x_K) n_1(x_1, x_2, \dots, x_K)} \right\}$$

efectuando-se o somatório ao longo das l células que foram efectivamente divididas.

Na hipótese H_0 mostra-se, recorrendo ao teorema de De Moivre-Laplace, que assimptoticamente Φ segue uma lei do χ^2 com l graus de liberdade (ver *Hallin & Ingenbleek* [1981] por exemplo).

Este teste poderia no entanto ser efectuado com o recurso a outras estatísticas como referem *van Eeghen & al* [1983] que sugerem algumas alternativas interessantes, utilizando outras aproximações à normal.

No caso de se estar a analisar a frequência de sinistralidade e de se admitir que o número de participações tem distribuição de Poisson, *van Eeghen & al* [1983] também propõem alterar a hipótese nula por forma a se considerar a sinistralidade média por célula e não apenas a frequência de não participações. Neste quadro define-se $n_T(x_1, x_2, \dots, x_K)$ como o número total de participações na célula definida por $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_K = x_K$, estabelecendo-se então

$$\hat{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_K) = \frac{n_T(x_1, x_2, \dots, x_K)}{n(x_1, x_2, \dots, x_K)}$$

como estimativa para a média em cada célula. Neste contexto um raciocínio semelhante ao anterior conduz a definir

$$H_0 : \lambda(x_1, x_2, \dots, x_K, 0) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_K, 1)$$

em todas as células efectivamente divididas (H_1 continua a ser a negação de H_0), sendo o teste efectuado com a estatística

$$\Psi = \sum \left\{ \left[\sqrt{\hat{p}_0(x_1, x_2, \dots, x_K, 0)} - \sqrt{\hat{p}_0(x_1, x_2, \dots, x_K, 1)} \right]^2 \right. \\ \left. \frac{4 n(x_1, x_2, \dots, x_K, 0) n(x_1, x_2, \dots, x_K, 1)}{n(x_1, x_2, \dots, x_K, 0) + n(x_1, x_2, \dots, x_K, 1)} \right\}$$

onde o somatório também é feito ao longo das células efectivamente divididas, tendo esta estatística uma distribuição assimpótica idêntica a Φ , isto é uma χ^2 com l graus de liberdade.

A análise passo a passo Cada etapa da análise é feita em duas fases:

- Fase de introdução - Efectua-se o teste Φ para cada uma das variáveis candidatas que não se encontram incluídas, introduzindo-se aquela que origina o maior valor da estatística desde que ultrapasse certo nível de significância previamente fixado. No início do procedimento, não existindo variáveis incluídas, procede-se tendo em conta que existe apenas 1 célula.
- Fase de exclusão - Para cada uma das variáveis incluídas efectua-se o teste Φ admitindo a exclusão desta variável, rejeitando-se aquela que corresponde ao menor valor da estatística desde que esteja abaixo de um limite de significância fixado. Como é óbvio, não é necessário efectuar este teste para a variável que se incluiu já que corresponde àquele que se efectuou na fase anterior, embora com propósito diferente.

O procedimento termina quando, em certo passo, não se consiga introduzir nenhuma nova variável.

Alguns comentários O procedimento que se descreveu destina-se, como já se disse, a seleccionar um sub-conjunto de variáveis dentro duma base mais lata. Saliente-se todavia que não se trata de um processo "óptimo", sendo aliás este conceito algo indefinido no que se refere à hipótese H_0 que se formulou. Neste contexto o seu interesse é essencialmente prático sendo aliás de analisar a evolução da análise passo a passo mais do que os resultados finais quer por problemas de dimensão mínima das diferentes células, quer também por uma certa coerência de resultados ⁵.

⁵Um pequeno exemplo pode ilustrar uma situação delicada. Imagine-se uma carteira com dois factores explicativos que permitem construir 4 células de idêntica dimensão, indicando-se no quadro a probabilidade de ocorrências de sinistros

	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$	
$X_2 = 0$	0.03	0.17	0.1
$X_2 = 1$	0.07	0.13	0.1
	0.05	0.15	0.1

Reforce-se por fim as limitação que derivam das dificuldades computacionais, com particular destaque para a necessidade de proceder a reagrupamento antes da construção das variáveis binárias sob pena de se obter um problema intratável, mas sabendo que cada reagrupamento influencia as conclusões que se vão tirar.

2.1.3. Os métodos baseados na análise passo a passo

Não se abordando, como se disse, os modelos lineares generalizados que serão tema do próximo capítulo, apenas se discutirá o processo de *Lemaire* [1985] com o qual se fechará esta secção. Estes algoritmos tem um âmbito mais alargado na medida em que permitem englobar as diferentes etapas de construção da tarifa, nomeadamente a fase de selecção e de estimação. Sublinhe-se ainda que se pode recorrer a este processo com qualquer tipo de variáveis exógenas, podendo no entanto a discretização de elementos contínuos diminuir a rigidez da estrutura linear.

Em termos teóricos, o processo de *Lemaire* não constitui grande novidade já que se trata de uma análise passo a passo ("stepwise") baseada na regressão linear múltipla residindo a sua originalidade no facto de ser a primeira aplicação desta técnica bem conhecida ao problema da construção de tarifas no ramo automóvel.

Como facilmente se deduz da metodologia utilizada, o processo pressuporá em rigor um modelo com estrutura aditiva ⁶ e uma variável referente à sinistralidade com distribuição normal, situação algo distante da realidade observada como o reconhece o próprio *Lemaire*. É neste campo que a utilização dos modelos lineares generalizados vai permitir ganhos substanciais na qualidade da modelização, ao ultrapassar estas limitações.

Nesta situação vê-se intuitivamente que X_1 é significativa, que X_2 por si só não o é mas que X_1 e X_2 tomados simultaneamente também o são. Enquanto outras metodologias não seleccionariam X_2 (ver processo de *Lemaire* por exemplo), já que tem um comportamento de sinal contrário nas diferentes células, este método obriga a cuidados redobrados na construção das tarifas na medida em que factores de efeitos contraditórios nem sempre são fáceis de entender.

⁶Também se poderia generalizar este processo sem grande dificuldade a uma estrutura multiplicativa, admitindo-se então uma distribuição lognormal para a sinistralidade.

2.2. Factores à posteriori

Se é certo que os primeiros sistemas de bonificação à posteriori das apólices que não originam sinistros surgiram antes da 2^a guerra mundial, não é menos verdade que a sua formalização só teve lugar no início dos anos 50 nos países nórdicos, tendo sido generalizados, nos termos em que actualmente são utilizados, nos anos 60.

Tais sistemas, constituindo um complemento dos factores directamente observáveis que se focaram na secção anterior, têm por finalidade, como já se disse, detectar, avaliar e introduzir na tarifa os efeitos conjuntos de factores considerados relevantes para a caracterização do risco transferido para a empresa seguradora mas que não são directamente mensuráveis, como por exemplo a prudência dos conductores, a sua rapidez de avaliação e de reacção perante determinada situação, etc

Pela sua natureza não observável, a introdução desses factores sob a forma indirecta de sistema de bonificação foi não só tardia em relação aos factores mensuráveis como também pouco pacífica e isto por três razões principais:

- A primeira, comum em parte à própria noção de tarifa diferenciada, tem origem na fundamentação do seguro. Se o princípio fundamental da actividade seguradora reside no agrupar de diversos riscos individuais que se supõem mais ou menos homogéneos na carteira de uma empresa seguradora por forma a que esta, baseando-se nas lei dos grandes números, assuma o conjunto das responsabilidades mediante o pagamento de um prémio pequeno face aos montantes que o risco pode assumir, em que medida o querer individualizar cada risco não porá tal princípio em causa? Tal crítica assume ainda maior força quanto se trata de factores avaliados de forma indirecta e em termos probabilísticos.
- A segunda razão prende-se com o facto da generalidade dos sistemas de bonificação transformarem o prémio a pagar numa variável aleatória se bem que com variância bastante menor que o risco original. A filosofia do seguro

também assenta no pressuposto que ao transferir o risco para a seguradora se substitui uma variável aleatória (o risco) por uma constante (o prémio).

- A terceira e última razão aponta para a necessidade de substituir as medições indirectas por medições directas tentando avançar no debate dos problemas técnicos que se deparam a tais medidas.

Como elementos representativos desta polémica que assumiu particular vivacidade no início da década de 60 podem citar-se *Franckx* [1960], *Thyrion* [1960], *Pesonen* [1962] e *Gütler* [1963].

Não tendo intenção de entrar em tal debate, já que, independentemente das razões que assistam a cada uma das partes e dos progressos que possam ter sido feitos na recolha e definição de mais elementos observáveis, os sistemas de bonificação espalharam-se em quase todos os países da CEE, nos EUA, Canadá, etc... e tendem a assumir importância crescente nas reformulações tarifárias que vão surgindo.

As razões desta evolução já foram focadas e prendem-se em boa parte na simplificação nos custos das seguradoras com a transferência dos pequenos sinistros para a responsabilidade dos segurados mas também se deve considerar que a maioria dos sistemas implementados permite, em termos técnicos, tirar partido de um notável conjunto de propriedades matemáticas. No capítulo 5 definem-se em termos rigorosos os sistemas de bonificação com interesse para a construção de tarifas.

3. Uma abordagem pela teoria da credibilidade

Não se pretende com esta secção realizar um "survey" sobre esta matéria mas tão somente apresentar as formas de abordar o problema da construção de tarifas quando tal questão é encarada sob o prisma da teoria da credibilidade. De facto, mais do que uma técnica particular, trata-se de uma forma de encarar os problemas que se pode inserir na família mais vasta dos modelos empirico-bayesianos.

Abordar-se-ão aqui três métodos de encarar a construção de tarifas com base nesta filosofia, começando-se por discutir esta problemática com base nos modelos genéricos da teoria da credibilidade para, num segundo tempo, introduzir uma formulação bastante mais elaborada com recurso aos modelos hierárquicos, que permitem, em circunstâncias óptimas de informação e poder de cálculo, a construção de uma tarifa bastante minuciosa. Introduce-se por fim uma formulação mais rigorosa do processo de risco, surgida em *Norberg* [1976] e cuja aplicação se encontra directamente virada para a discussão dos sistemas de bonus que se fará no capítulo 5. No entanto, como se sugere, tal formulação também poderia merecer tratamento diferente regressando-se à ideia base subjacente ao modelo de Bühlmann.

3.1. Uma abordagem pelos modelos genéricos

Neste ponto apresentam-se duas possíveis utilizações de outros tantos modelos clássicos de teoria da credibilidade, o modelo de *Bühlmann* [1969] e o de *Bühlmann & Straub* [1970], de que se exporão apenas os aspectos essenciais para a compreensão das aplicações feitas, podendo encontrar-se apresentações pormenorizadas dos referidos modelos nos artigos citados ou em qualquer trabalho de divulgação de teoria da credibilidade ⁷.

3.1.1. O modelo de Bühlmann

Como se sabe este modelo baseia-se na existência de um colectivo com uma estrutura mais ou menos homogénea em que as apólice são caracterizadas por um particular valor da variável aleatória θ , designada por variável estrutural, com distribuição $U(\theta)$ no colectivo. Admite-se ainda que, dado θ , as indemnizações ao longo do tempo constituem uma sucessão de variáveis independentes e identicamente distribuídas, bem como a independência condicionada apenas por θ entre dois riscos incluídos no colectivo.

⁷Cite-se nomeadamente a excelente síntese de *Norberg* [1979], ou ainda *Reis* [1987].

Neste contexto, e designando por X_{tj} o montante de indemnizações a atribuir à apólice j no período t , procurar-se-á obter \tilde{m}_j estimador de $m(\theta_j) = E(X|\theta_j)$ para $j = 1, \dots, J$ dada a informação existente sobre a sinistralidade passada das diferentes apólices. Contrariando o método até então muito em vigor de recorrer a um modelo puramente bayesiano com utilização sempre que possível de distribuições conjugadas, *Bühlmann* [1969] restringiu a sua análise à classe dos estimadores lineares tendo deduzido, no quadro das hipóteses do modelo e minimizando uma função perda quadrática, o estimador de credibilidade para o prémio puro que se pode escrever

$$\tilde{m}_j = z_t \bar{X}_j + (1 - z_t) \mu \quad (3.8)$$

em que

$$\begin{cases} \mu = E[m(\theta_j)] \\ \phi = E[\text{Var}(X|\theta_j)] \\ \psi = \text{Var}[E(X|\theta_j)] \\ z_t = \frac{t \psi}{t \psi + \phi} \end{cases}$$

em que t traduz o número de períodos de observação de que se dispõe para efectuar a estimação. Este resultado clássico da teoria da credibilidade permite traduzir a ideia base que as novas apólices devem ser penalizadas pelo valor médio da sinistralidade observada ($z_0 = 0$) enquanto as apólices antigas têm uma penalização dependente em larga medida da sua própria sinistralidade passada.

Bühlmann [1969] também propõe estimadores para os parâmetros estruturais μ , ψ e ϕ independentes de qualquer distribuição particular, partindo da observação do colectivo ao longo de alguns períodos e estabelecendo aquilo que designou por estimadores naturais.

No caso de apenas se dispor de observações referentes a um período temporal, é necessário admitir algumas hipóteses estatísticas adicionais, nomeadamente que o número de sinistros originados por cada apólice, dado o seu parâmetro de risco respectivo θ , segue uma lei de Poisson de média θ .

Bühlmann [1970], tirando partido do facto de, no caso de se admitir tal

hipótese, $\text{Var}(X|\theta) = E(X|\theta)$ deduziu

$$\phi = \mu$$

$$\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|\theta)) + \text{Var}(E(X|\theta)) = E(E(X|\theta)) + \psi = \mu + \psi$$

propondo então como estimadores para ϕ e ψ ,

$$\tilde{\phi} = \bar{X} \quad \text{e} \quad \tilde{\psi} = S^2 - \bar{X}$$

Lemaire [1985] reencontra estes mesmos estimadores ao partir de um modelo Poisson-Gama de inspiração bayesiana e ao recorrer ao método dos momentos para estimar os parâmetros da gama. O quadro proposto por este autor permite que se teste estatisticamente a aderência dos valores observados ao modelo teórico e que se possa eventualmente recorrer ao método da máxima verosimilhança na estimação dos parâmetros.

Para concluir este ponto apresenta-se um exemplo da aplicação desta metodologia à carteira observada para 1987 (apenas se consideraram as apólices que permaneceram na carteira durante a totalidade do período, sem sofrer alterações nas suas características básicas).

Dado que o método proposto por Bühlmann origina as mesmas estimativas do que o modelo Poisson-Gama quando se recorre ao método dos momentos, apenas se irá referir este modelo nas suas duas vertentes, máxima verosimilhança e momentos. A estimação dos parâmetros da gama, n e α , originou os valores $\hat{n} = 0.91191$ e $\hat{\alpha} = 14.33432$ pela máxima verosimilhança e $\tilde{n} = 0.88686$ e $\tilde{\alpha} = 13.94053$ pelos momentos que conduzem, em ambos os casos, a valores estimados bastante aceitáveis face aos observados (ver quadro 3.1), com ligeiro predomínio da máxima verosimilhança como seria de esperar.

Uma vez obtidos os parâmetros da distribuição estrutural, deduzem-se sem dificuldades os parâmetros estruturais que serão

Estimadores para	Max. Veros.	Momentos
$\mu = \phi = n/\alpha$	0.06362	0.06362
$\psi = n/\alpha^2$	0.00444	0.00456
$\phi/\psi = \alpha$	14.33432	13.94053

Quadro 3.1 - Frequências de sinistralidade em 1987

Sin.	Observados	Max. Veros.	Momentos
0	142622	142625.70	142633.86
1	8500	8421.79	8466.67
2	505	528.76	534.63
3	42	33.47	34.43
4	2	2.13	2.24
5	1	0.14	0.15
Teste χ^2 (3 g.l.)		3.500	3.587

Finalmente, no quadro 3.2, apresentam-se os sistemas de bonificações originados por estes sistemas, tendo-se normalizado os resultados pela fixação do valor 100 para o prémio no ano 0 de permanência de cada apólice e limitado os resultados a 11 anos e a um máximo de 5 participações. Saliente-se a grande semelhança de valores entre os dois métodos, como seria de esperar face às estimativas obtidas para o quociente ϕ/ψ .

3.1.2. O modelo de Campbell

O trabalho de *Campbell* [1986] discute, ao contrário do caso que se acabou de apresentar onde se aplicava directamente um modelo de teoria da credibilidade, a construção de tarifas no seguro automóvel, ou para ser mais preciso a inclusão das características referentes aos veículos seguros nesta tarifa. Este autor procurou também incluir no modelo factores exógenos como a opinião de peritos.

Como se disse, a preocupação de Campbell dirige-se para a forma de incluir os diferentes modelos de veículos seguros na tarifa, nomeadamente quando surge um novo modelo para o qual não existe ainda uma base de dados sobre sinistralidade. Com este objectivo procede-se a uma filtragem dos dados referentes à sinistralidade, construindo-se uma unidade de avaliação do risco que consiga uniformizar o grau de exposição das diferentes classes, quer em termos de volume, isto é tempo e

Quadro 3.2 - Sistema de bonificação: modelo de Bühlmann

Ano	Método da Máxima Verosimilhança					
	total de sinistros					
	0	1	2	3	4	5
0	100.00	—	—	—	—	—
1	93.48	195.99	298.50	401.00	503.51	606.02
2	87.76	183.99	280.22	376.45	472.69	568.92
3	82.69	173.37	264.06	354.74	445.42	536.10
4	78.18	163.92	249.65	335.39	421.12	506.86
5	74.14	155.44	236.74	318.04	399.34	480.64
6	70.49	147.80	225.10	302.40	379.70	457.01
7	67.19	140.87	214.55	288.23	361.91	435.59
8	64.18	134.56	204.94	275.32	345.70	416.08
9	61.43	128.79	196.16	263.52	330.89	398.25
10	58.91	123.50	188.10	252.69	317.29	381.89
11	56.58	118.63	180.67	242.72	304.77	366.81

Ano	Método dos Momentos					
	total de sinistros					
	0	1	2	3	4	5
0	100.00	—	—	—	—	—
1	93.31	198.52	303.73	408.94	514.15	619.36
2	87.45	186.06	284.67	383.28	481.89	580.50
3	82.29	175.08	267.87	360.66	453.45	546.24
4	77.70	165.32	252.94	340.55	428.17	515.79
5	73.60	156.59	239.58	322.57	405.57	488.56
6	69.91	148.74	227.57	306.40	385.23	464.06
7	66.57	141.64	216.70	291.77	366.83	441.90
8	63.54	135.18	206.82	278.47	350.11	421.75
9	60.77	129.29	197.81	266.33	334.85	403.37
10	58.23	123.89	189.55	255.20	320.86	386.52
11	55.90	118.92	181.95	244.97	308.00	371.02

número de unidades, quer em termos de outras características que, embora influenciando a sinistralidade, não estão directamente relacionadas com o veículo como por exemplo o grupo etário do condutor, a sua área de residência ou a sua posição no sistema de bonificação.

Refira-se aliás que se encontram filtragens deste tipo noutros estudos cujo âmbito apenas pretende cobrir parcialmente a problemática inerente à construção de tarifas (veja-se por exemplo Sundt [1987]).

Em termos práticos o processo de Campbell consiste em dividir o montante de indemnizações pagas para cada modelo de veículo pelo montante de prémios cobrados para o mesmo grupo o que, na opinião deste autor, permite eliminar fenómenos como a inflação para além da uniformização que introduz.

Após esta fase preliminar trata-se de reagrupar os diferentes modelos de veículos em conjuntos mais latos partindo do princípio que existem diversos graus de similitude entre os diferentes modelos. Para tal procede-se a uma análise em termos de "clusters", obtendo uma partição da carteira em estudo num número aceitável de grupos. Tal reagrupamento que deve responder a dois objectivos antagónicos (formar o menor número possível de classes e eliminar o menor volume de informação face à multiplicidade de modelos iniciais) pode ser testado por técnicas habituais, como a análise da variância⁸ por exemplo, para verificar a pertinência da divisão estabelecida. Assinale-se que nada se oporia a aplicar uma tal análise quando se formula a construção de tarifas com base noutras filosofias, nomeadamente depois de se ter procedido a uma ampla selecção de variáveis com técnicas do tipo da de Hallin & Ingenbleek [1981].

Uma vez estabelecidas as classes que vão ser objecto da tarifa, recorre-se a uma metodologia clássica da teoria da credibilidade, o modelo de Bühlmann & Straub [1970], já que as diferenças que se verificam entre grupos não permitem certamente recorrer ao modelo de Bühlmann de que se falou anteriormente.

Seja então P_{tj} uma medida do volume de risco para o modelo j no período t que

⁸Tenha-se presente que a ANOVA, como qualquer técnica estatística, parte dum quadro de hipóteses que, a não se verificarem, limitam de forma mais ou menos séria a validade das conclusões (Veja-se, entre outros, Murteira [1990]).

se supõe conhecida e seja ainda X_{tj} a sinistralidade “normalizada” nas condições anteriores isto é o quociente entre montante das indemnizações pagas naquele ano para aquela classe e o volume de risco envolvido. Admite-se ainda que as diferenças entre classes se representam como realizações da variável estrutural θ com distribuição no colectivo dada por $U(\theta)$ e que se verificam duas hipóteses adicionais do tipo daquelas que se admitiram no modelo de Bühlmann, ou seja a independência das ocorrências ao longo do tempo para um dado risco caracterizado por um valor de θ_j , e independência entre riscos dados os valores de θ respectivos. Para além disso

$$\begin{cases} E(X_{tj}|\theta_{tj}) = m(\theta_j) \\ \text{Var}(X_{tj}|\theta_{tj}) = \sigma^2(\theta_j)/P_{tj} \end{cases}$$

Uma apresentação formal deste modelo e das hipóteses que lhe estão inerentes pode ser vista em numerosos trabalhos como por exemplo *Bühlmann & Straub* [1970] ou *Reis* [1987].

Neste quadro o estimador para $m(\theta_j)$, linear em X_{1j}, \dots, X_{Tj} , que minimiza o erro quadrático médio, seja \tilde{m}_j , será dado por

$$\tilde{m}_j = \alpha_j X_j + (1 - \alpha_j) \mu \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{cases} \alpha_j = \frac{P_j \psi}{P_j \psi + \phi} \\ P_j = \sum_{t=1}^T P_{tj} \\ \mu = E[m(\theta_j)] \\ \phi = E[\sigma^2(\theta_j)] \\ \psi = \text{Var}[m(\theta_j)] \end{cases}$$

A estimação dos parâmetros estruturais μ , ϕ e ψ já foi objecto de alguma

discussão propondo *Campbell* [1986] os seguintes estimadores:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{J-1} \sum_{t=1}^T P_{tj} (X_{tj} - X_j)^2 \\ \tilde{\psi} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^J p_j (1 - p_j)} \sum_{j=1}^J p_j (X_j - X)^2 - (J-1) \frac{\tilde{\phi}}{P} \\ \tilde{\alpha}_j &= \frac{P_j \tilde{\psi}}{P_j \tilde{\psi} + \tilde{\phi}} \\ \tilde{\mu} &= \left(\sum_{j=1}^J \tilde{\alpha}_j X_j \right) / \sum_{j=1}^J \tilde{\alpha}_j\end{aligned}$$

sendo,

$$\begin{aligned}P &= \sum_{j=1}^J P_j \\ p_j &= \frac{P_j}{P} \\ X_j &= \frac{1}{P_j} \sum_{t=1}^T P_{tj} X_{tj} \\ X &= \frac{1}{P} \sum_{j=1}^J P_j X_j\end{aligned}$$

O último passo proposto na abordagem de *Campbell* [1986] consiste na extensão do modelo por forma a poder englobar as opiniões dos peritos. Prosseguindo na aplicação da teoria da credibilidade, este autor vai construir um estimador composto entre aquele que se obtem do modelo de Bühlmann-Straub e as perspectivas dos peritos através de

$$\tilde{m}_j^* = a \tilde{m}_j + (1 - a) m_j^*$$

em que m_j^* representa as estimativas dos peritos e a será estimado num quadro de hipóteses semelhantes às dos modelos de credibilidade.

Se esta generalização apresenta inegavelmente um certo interesse teórico, as suas limitações também são significativas já que podem obter-se ponderadores que não tenham uma evolução de mesmo sentido como se pode ver no quadro 3.3 tirado do exemplo apresentado em *Campbell* [1986].

Estes resultados parecem indicar um acréscimo de importância dos elementos referentes ao modelo quando aumenta o período de observação compensado por

**Quadro 3.3 - Peso a atribuir às várias fontes de informação
resultados tirados de *Campbell* [1986]**

Anos	Modelo	Colectivo	Peritos
1	0.07	0.38	0.55
2	0.18	0.29	0.53
3	0.07	0.33	0.60
4	0.08	0.25	0.67
5	0.10	0.24	0.66
6	0.16	0.22	0.62
7	0.27	0.19	0.54

um decréscimo dos elemento referentes ao colectivo tendo no entanto a inclusão das opiniões dos peritos introduzido uma perturbação assinalável em tal evolução. Tal fenómeno encontra-se sem dúvida ligado às hipóteses que se fizeram sobre tais julgamentos, parecendo talvez mais aconselhável, no estado actual, desenvolver um estudo estatístico sem envolver estes elementos que serão introduzidos numa fase final onde também se têm que ponderar elementos ligados ao “marketing” ou ao comportamento das outras seguradoras.

3.2. O modelo hierárquico de Sundt

O conceito de modelo hierárquico surge em *Jewell* [1975] e procura, na sua versão original, agregar colectivos diferentes que se supõem semelhantes, já que se referem a riscos de mesma natureza, mas contendo especificidades próprias a cada um dos colectivos para além, claro está, das características inerentes a cada risco considerado de forma individual.

Generaliza-se então a noção de distribuição estrutural passando-se a representar as características da estrutura por uma distribuição hierarquizada. Cada colectivo terá um parâmetro de risco correspondendente a uma realização da variável η com distribuição $W(\eta)$ no espaço dos colectivos estando agora a distribuição es-

trutural interna ao colectivo condicionada pela anterior isto é passará a ser $U(\theta|\eta)$.

Sublinhe-se que o interesse de tal formalização reside na introdução da noção de hierarquia e não tanto no aumento dos parâmetros estruturais já que a passagem de θ a vector de parâmetros, bastante mais simples em termos da elaboração dos modelos, não apresenta grande interesse na modelização de situações reais.

Sundt [1987] retoma esta noção de hierarquia combinando-a com uma formalização baseada num modelo de regressão linear (com uma ligação óbvia ao trabalho pioneiro de *Hachemeister* [1975] na aplicação dos princípios da regressão linear múltipla à teoria da credibilidade), para modelizar a construção de tarifas para o ramo automóvel.

A ideia base subjacente a este modelo consiste em considerar que a propensão à sinistralidade originada por determinada apólice depende das características técnicas do veículo ⁹ definidas em função da marca e modelo do veículo, isto é o modelo de regressão linear entre sinistralidade e características técnicas do veículo estará dependente das variáveis estruturais representando a marca e modelo do veículo. Trata-se no fundo de aplicar a noção de Jewell não para reagrupar colectivos numa super estrutura, mas sim para definir sub-colectivos mais homogéneos no âmbito da carteira em análise.

Em termos formais procurar-se-á estimar

$$m_{nk}(\theta_{nk}, \eta_n) = E(Y_{nki}|\theta_{nk}, \eta_n) \quad (3.10)$$

onde os índices n , k e i se referem à marca ($n = 1, \dots, N$), modelo ($k = 1, \dots, K_n$) e apólice ($i = 1, \dots, I_{nk}$), enquanto η representa o parâmetro estrutural de nível superior e θ_n a estrutura dentro da marca n . A variável Y representa uma medida da sinistralidade depois de convenientemente filtrada.

A filtragem dos dados No seu trabalho *Sundt* [1987] constroi Y_{nki} como quociente entre o montante total de indemnizações pagas S_{nki} e um factor de risco w_{nki} .

⁹A generalização ao condutor apenas é concebida de forma muito indirecta no referido trabalho, já que não se analisam as idemnizações pagas pela seguradora mas uma variável alisada onde se ponderaram eventuais características individuais inerentes à apólice.

Este factor destina-se a ponderar a informação referente àquela apólice particular, tomando o prémio pago, p_{nki} , como indicador do grau de risco e expurgando-o dos efeitos devidos à marca e modelo (representados pelo factor tarifário em vigor f_{nk}) uma vez que se pretende modelizar estes mesmos efeitos. Assim

$$w_{nki} = p_{nki} / f_{nk}$$

definido-se

$$Y_{nki} = S_{nki} / w_{nki}$$

o que permite, teoricamente pelo menos, expurgar os efeitos de outros factores que não sejam as características técnicas dos veículos.

O modelo hierárquico O conceito de regressão hierárquica é introduzido quando se estabelece

$$E[m_{nk}(\theta_{nk}, \eta_n) | \eta_n] = \underline{x}'_{nk} \underline{b}_n(\eta_n) \quad (3.11)$$

representando-se no vector \underline{x}_{nk} as variáveis referentes às características técnicas do modelo k da marca n . Repare-se que o vector $\underline{b}_n(\eta_n)$ é constante para determinada marca.

Postulando algumas hipóteses adicionais, Sundt [1987], após longa e laboriosa demonstração estabelece as expressões dos estimadores do modelo obtendo, como resultados mais significativos,

$$\begin{cases} \tilde{m}_{nk} = \zeta_{nk} Y_{nk} + (1 - \zeta_{nk}) \underline{x}'_{nk} \tilde{\underline{b}}_n \\ \tilde{\underline{b}}_n = \Delta_n \hat{\underline{b}}_n + (I_q - \Delta_n) \underline{\hat{\beta}} \end{cases} \quad (3.12)$$

sendo

\tilde{m}_{nk} estimador de credibilidade para $m_{nk} = E(Y_{nki} | \eta_n, \theta_{nk})$ que é obtido, como é habitual em teoria da credibilidade, por ponderação entre o estimador directo que será o valor observado, Y_{nk} , e o estimador obtido a partir da informação colateral, isto é $\underline{x}'_{nk} \tilde{\underline{b}}_n$.

\tilde{b}_n estimador de credibilidade para $b_n(\eta_n)$ obtido, uma vez mais, por ponderação entre o estimador directo para aquela marca, \hat{b}_n , e o estimador global para a carteira, $\hat{\beta}$.

\hat{b}_n é obtido por regressão da sinistralidade sobre as características técnicas, apenas se considerando os veículos da marca n , uma vez que se trata do estimador directo. Em termos metodológicos, Sundt recorre aos mínimos quadrados ponderados para ter em conta as diversas exposições ao risco a que os diferentes modelos estão sujeitos.

β Vector dos coeficientes globais referentes às características técnicas retidas. Por definição ter-se-á

$$\beta = E[b_n(\eta_n)]$$

A estimação deste vector é feito tendo por base as exposições ao risco das diferentes marcas bem como os \hat{b}_n obtidos.

Δ_n será uma matriz que generaliza o conceito de ponderador. Não se refere a sua estimação em função dos dados por se tratar de expressões bastante complicadas (veja-se Sundt [1987]). Recorde-se que I_q é uma matriz identidade de ordem q (número de características retidas).

Refira-se no entanto que o processo de obtenção destes estimadores para os diferentes parâmetros estruturais é bastante complicado nomeadamente as restrições associadas às matrizes de variâncias/covariâncias que necessitam por vezes de algumas correcções por forma a garantir-se a admissibilidade dos resultados (veja-se Sundt [1987]).

Alguns comentários Um modelo deste teor, pese embora o imenso volume de calculatória envolvido, permite obter resultados práticos bastante interessantes como o mostra o exemplo desenvolvido por Sundt e que será retomado no capítulo 6.

Convém no entanto não esquecer que, para se obterem estimativas aceitáveis, é necessário recorrer a um grande volume de informação, obtendo-se elementos

bastante pormenorizados o que limita bastante a sua aplicabilidade. O caso português é paradigmático desta situação já que, com os dados disponíveis, não é possível enveredar por um tipo de modelização tão exigente.

Refira-se ainda que para uma melhor adequação à realidade seria necessário estender o conceito de hierarquia a três níveis distintos uma vez que dentro dos principais modelos existe uma gama de versões bastante alargada que corresponde a especificações técnicas bem diferentes. Com base em apenas dois níveis fica-se obrigado a desprezar tais diferenças ou a proceder a uma pulverização definindo o segundo nível directamente em função da versão e não do modelo o que levaria por um lado a desprezar informação colateral e por outro a definir gupos demasiado pequenos para uma estimação eficiente (veja-se a este propósito *Sundt [1987]*). A contrapartida de uma extensão do modelo seria um grande aumento na sua complexidade e nas necessidades de informação.

Ao contrário de *Campbell [1986]*, *Sundt* não propõe uma metodologia para tratamento das opiniões emitidas pelos peritos, sugerindo antes que os resultados obtidos com o modelo sirvam de base à tomada de decisão que, essa sim, deve ter em conta muitos outros aspectos entre os quais se incluem as opiniões dos peritos, sobretudo para veículos para os quais ainda não existam elementos informativos suficientes na carteira.

Parece portanto lícito sublinhar o interesse duma metodologia deste tipo que sublinha a versatilidade da teoria da credibilidade como filosofia de abordagem deste tipo de problema, sendo no entanto de referir o grande peso, quer em meios de cálculo quer em informação disponível, que é necessário suportar para implementar este tipo de abordagem.

3.3. Uma primeira formulação do método de Norberg

Considere-se um risco tirado aleatoriamente de uma carteira de riscos homogéneos face aos factores mensuráveis à priori. Recorrendo à terminologia de *Norberg [1976]* define-se

- M_n número de participações feitas à empresa seguradora no período n por este risco (ou participações com responsabilidade do segurado no acidente conforme as regras que vigorem)
- Y_{nj} montante da j -ésima indemnização no mesmo período (por convenção $Y_{n0} \equiv 0 \forall n$).
- X_n montante total das indemnizações pagas pela seguradora no mesmo período por este risco, isto é

$$X_n = \sum_{j=0}^{M_n} Y_{nj} \quad (3.13)$$

- ξ_n informação disponível no início do período n

$$\xi_n = (M_1, \dots, M_{n-1}, Y_{11}, \dots, Y_{1M_1}, \dots, Y_{n-1;1}, \dots, Y_{n-1;M_{n-1}})$$

- Z_n base de tarificação isto é informação utilizável para estes efeitos no início do período n . Z_n é uma função mensurável de ξ_n .

Admite-se também que cada risco se encontra plenamente caracterizado por um parâmetro (ou vector de parâmetros) θ realização de uma variável aleatória com distribuição $U(\theta)$ no colectivo e que $\{X_n\}$ forma, dado θ , uma sucessão de variáveis independentes e idênticamente distribuídas.

No quadro deste processo de risco, a estimação do prémio puro de risco $E(X_n|\theta)$ vai ser feita recorrendo à informação utilizável Z_n . Seja então $a_n(Z_n)$ um estimador genérico para o prémio de credibilidade e defina-se uma função perda quadrática, isto é a função risco $Q_n[a_n(Z_n)]$ vai ser estabelecida através de

$$Q_n[a_n(Z_n)] = E \left[[E(X_n|\theta) - a_n(Z_n)]^2 \right] \quad (3.14)$$

Defina-se ainda o *prémio de credibilidade baseado em Z_n* , $\mu_n(Z_n)$ como sendo

$$\mu_n(Z_n) = E[E(X_n|\theta) | Z_n] \quad (3.15)$$

Prova-se então pelo teorema 3.1 que $\mu_n(Z_n)$ é o estimador que minimiza (3.14), isto é que $\mu_n(Z_n)$ é o melhor estimador para o prémio de credibilidade com a função risco especificada.

Teorema 3.1 (Norberg [1976]) $\forall a_n(Z_n)$ estimador para $E(X_n|\theta)$ então

1. $Q_n[a_n(Z_n)] \geq E(\text{Var}[E(X_n|\theta)|Z_n])$
2. A relação anterior verifica-se como igualdade se e só se

$$\text{Prob}[a_n(Z_n) = \mu_n(Z_n)] = 1$$

demonstração:

$$\begin{aligned} Q_n[a_n(Z_n)] &= E\{[E(X_n|\theta) - a_n(Z_n)]^2\} \\ &= E(E[E(X_n|\theta) - a_n(Z_n)]^2|Z_n) \\ &= E(\text{Var}[E(X_n|\theta)|Z_n] + (E[E(X_n|\theta)|Z_n] - a_n(Z_n))^2) \\ &= E(\text{Var}[E(X_n|\theta)|Z_n]) + E([E(X_n|\theta)|Z_n] - a_n(Z_n))^2 \\ &= E(\text{Var}[E(X_n|\theta)|Z_n]) + E([\mu_n(Z_n) - a_n(Z_n)]^2) \end{aligned}$$

o que torna óbvios os pontos (1) e (2) do teorema. ∇

Observando que o conhecimento de Z_n conduz, em termos de teoria da credibilidade, à definição do estimador $\mu_n(Z_n)$, isto é que dado Z_n ter-se-á

$$Q_n(Z_n) = Q_n[\mu_n(Z_n)],$$

Norberg [1976] definiu o conceito de base de tarifação mais eficiente, estabelecendo a partir deste um critério de eficiência $e_n(Z_n)$.

Definição 1 A base Z_n será designada como mais eficiente (\succ_n) que a base \tilde{Z}_n se conduzir a um risco menor, isto é

$$Z_n \succ_n \tilde{Z}_n \text{ se } Q_n(Z_n) < Q_n(\tilde{Z}_n) \quad (3.16)$$

Proposição 1 Seja $e_n(Z_n)$ definido através de

$$e_n(Z_n) = E[\mu_n^2(Z_n)]$$

um critério de eficiência da base Z_n já que

$$e_n(Z_n) > e_n(\tilde{Z}_n) \iff Z_n \succ_n \tilde{Z}_n$$

demonstração:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[E(X_n|\theta)] &= \text{Var}\{E[E(X_n|\theta)|Z_n]\} + E\{\text{Var}[E(X_n|\theta)|Z_n]\} \\
 &= \text{Var}[\mu_n(Z_n)] + Q_n(Z_n) \quad (\text{ver teorema 3.1}) \\
 &= E[\mu_n^2(Z_n)] - E^2[\mu_n(Z_n)] + Q_n(Z_n) \\
 &= e_n(Z_n) - E^2(X_n) + Q_n(Z_n)
 \end{aligned}$$

donde

$$e_n(Z_n) + Q_n(Z_n) = \text{Var}[E(X_n|\theta)] + E^2(X_n)$$

ou seja a soma de $e_n(Z_n)$ e de $Q_n(Z_n)$ é independente de Z_n , isto é

$$e_n(Z_n) > e_n(\tilde{Z}_n) \iff Q_n(Z_n) < Q_n(\tilde{Z}_n) \iff Z_n \succ_n \tilde{Z}_n$$

▽

Pode-se assim sintetizar esta primeira abordagem pela teoria da credibilidade da tarifação diferenciada em dois pontos fundamentais

- Optar pela base de tarifação Z_n que maximize $e_n(Z_n)$
- Uma vez Z_n escolhida, utilizar $\mu_n(Z_n)$ como estimador para $E(X_n|\theta)$

Em termos teóricos parece assim bastante simples utilizar a teoria da credibilidade para introduzir factores não observáveis no sistema de tarifação. Todavia, mesmo recorrendo a hipóteses simplificadoras no processo de risco, nem sempre é fácil determinar Z_n e muitas vezes as expressões que definem $\mu_n(Z_n)$ apresentam grande complexidade, sobretudo se se abandonar o uso de distribuições conjugadas.

Uma solução possível seria de recorrer à filosofia inerente ao modelo de Bühlmann trabalhando apenas na classe dos estimadores lineares, mantendo-se no entanto em aberto os problemas inerentes à definição da melhor base de tarifação.

Tal não foi no entanto a solução retida por Norberg que, referindo a necessidade de manter um conjunto simples de regras por forma a ser facilmente entendido pelos segurados bem como o interesse em gerar processos sem "memória", irá formular metodologias ótimas de construção e estimação dos sistemas de bonus/malus, problemática que será desenvolvida no capítulo quinto.

Capítulo 4

Modelos Lineares Generalizados

Os modelos lineares generalizados (GLM) foram introduzidos em 1972 por Nelder e Wedderburn e constituem uma generalização do modelo habitual de regressão linear múltipla, alargando as hipóteses sobre a distribuição da variável endógena da lei normal para a família exponencial o que permite recorrer à generalidade das distribuições utilizadas correntemente (normal, Poisson, binomial, gama, etc...). Para tal, introduz-se o conceito de função de ligação entre a expressão linear cujos parâmetros se vão estimar e a média da variável endógena, conceito que se abordará detalhadamente no ponto seguinte.

Após uma apresentação genérica deste tipo de modelos, discutir-se-á um caso particular de grande interesse na modelização de tarifas, a saber os modelos constituídos apenas por factores, conceito que será formalizado na secção 2.

Na secção 3, particularizar-se-á ainda mais o âmbito da análise, estudando-se, dentro dos modelos compostos apenas por factores, aqueles cuja variável endógena segue uma lei de Poisson, dando-se particular relevo a dois pontos; por um lado à estimação do vector $\underline{\beta}$, procurando tirar partido dos trabalhos de Ter Berg, e, por outro lado, à discussão em torno dos critérios para avaliar a qualidade dos ajustamentos obtidos, sugerindo-se, face às limitações observadas nos testes genéricos, dois novos testes estatísticos cujo comportamento vai ser avaliado com base num pequeno estudo de simulação.

1. Uma apresentação geral

Esta secção constitui uma introdução, necessariamente breve, aos modelos lineares generalizados, procurando-se referir os elementos mais significativos para a compreensão dos modelos que se irão estudar na modelização do seguro automóvel. Para uma apresentação mais completa desta metodologia, recomenda-se o artigo inicial de *Nelder & Wedderburn* [1972] bem como o livro de *McCullagh & Nelder* [1983] que, para além de conter uma apresentação bastante completa destes modelos, não deixa de tratar numerosos exemplos. Refira-se também que neste livro se faz eco das numerosas contribuições para o desenvolvimento desta metodologia, que surgiram, principalmente na Grã-Bretanha, durante os anos 70 e 80.

Na sequência do interesse por estes modelos surgiu, num primeiro tempo, o programa GLIM ("the Generalized Linear Interactive Modelling System"), elaborado pelo NAG ("Numerical Algorithms Group") em colaboração com a Royal Statistical Society, que permite, de forma simples, a estimação destes modelos. Posteriormente alguns "packages" de âmbito mais geral incluíram já rotinas ou procedimentos para utilizar esta abordagem.

Sublinhe-se ainda que o manual da versão 3.77 do GLIM contém, em anexo, uma breve e muito interessante síntese sobre os modelos lineares generalizados se bem que orientada, como é natural, para a utilização deste programa.

1.1. Definição

Seja um conjunto de N variáveis aleatórias independentes Y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) de média respectiva μ_i . Um modelo linear generalizado será definido por 3 características:

- $Y_i \sim f(\cdot)$, sendo $f(\cdot)$ uma distribuição da família exponencial, isto é

$$f(y_i, \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{[y_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a_i(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\} \quad (4.1)$$

sendo $a_i(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot, \cdot)$ funções adequadas a cada caso particular, e $a_i(\phi)$ da forma ϕ/w_i com w_i conhecido ¹. Refira-se ainda que o parâmetro de escala, ϕ , não depende de i .

Das bem conhecidas relações

$$E \left[\frac{\partial L_i}{\partial \theta_i} \right] = 0 \quad \text{e} \quad E \left[\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_i^2} \right] = -E \left[\frac{\partial L_i}{\partial \theta_i} \right]^2$$

onde L_i é o logaritmo da função de verosimilhança de Y_i , conclui-se sem dificuldade que

$$\begin{cases} E(Y_i) = \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i} = \mu_i \\ \text{Var}(Y_i) = \frac{d^2b(\theta_i)}{d\theta_i^2} a_i(\phi) = \frac{d\mu_i}{d\theta_i} a_i(\phi) \end{cases}$$

- Define-se um predictor linear η_i como combinação linear das variáveis explicativas, ou seja

$$\eta_i = \mathbf{X}_i \underline{\beta} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ou em termos matriciais

$$\underline{\eta} = \mathbf{X} \underline{\beta} \quad (4.2)$$

sendo a matriz \mathbf{X} conhecida e $\underline{\beta}$ um vector de parâmetros desconhecidos a estimar.

- Existe uma função de ligação g_i , monótona e diferenciável, que relaciona μ_i com η_i através de

$$\eta_i = g_i(\mu_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.3)$$

Como caso particular mais significativo define-se a *função canónica de ligação* quando $\eta_i = \theta_i$ para $i = 1, \dots, N$.

¹Sublinhe-se que, no caso de ϕ ser desconhecido, apenas se consideram os casos que não saiem da família exponencial.

Quadro 4.1 - Modelo Individual

	Normal	Poisson	Gama
Domínio	$(-\infty, +\infty)$	$0..+\infty$	$(0, +\infty)$
a(.)	ϕ	1	ϕ^{-1}
b(.)	$\frac{1}{2}\theta^2$	e^θ	$-\ln(-\theta)$
c(.,.)	$-\frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{\phi} + \ln(2\pi\phi) \right]$	$-\ln(y!)$	$(\phi-1) \ln(y\phi) + \ln(\phi) - \ln(\Gamma(\phi))$
μ	θ	e^θ	$-\theta^{-1}$
lig. can.	$\eta = \mu$	$\eta = \ln(\mu)$	$\eta = -\mu^{-1}$
"deviance"	$\sum (y - \hat{\mu})^2$	$2 \sum [y \ln(y/\hat{\mu}) - (y - \hat{\mu})]$	$2 \sum [-y \ln(y/\hat{\mu}) + (y - \hat{\mu})/\hat{\mu}]$

Como se referiu no ponto anterior, estes modelos generalizam quer o modelo de regressão linear, caso em que Y tem distribuição normal e $g(.)$ corresponde à função identidade, quer o modelo loglinear de Poisson, quando Y tem distribuição de Poisson e $g(.)$ corresponde à função logaritmo, quer ainda muitos outras situações.

No quadro 4.1 apresentam-se algumas características das três distribuições da família exponencial com que se irá trabalhar, indicando-se também para cada caso a função de ligação canónica e a "deviance" (estatística de desvio) que será abordada mais adiante.

1.2. Estimação dos Parâmetros

Seja então $L(\theta, \phi)$ o logaritmo da função de verosimilhança de \underline{Y} .

$$L(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{Y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(Y_i, \phi) \right] \quad (4.4)$$

que é função composta dos β_j ($j = 1, \dots, p$) já que

- $\mu_i = \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i}$
- $\eta_i = g_i(\mu_i) = X_{i.} \underline{\beta}$

1.2.1. Estimação do vector $\underline{\beta}$

A maximização de $L(\theta, \phi)$ em ordem a $\underline{\beta}$ é feita recorrendo ao método dos scores de Fisher que, quando se utiliza a função de ligação canónica, se reduz ao algoritmo de Newton-Raphson o que permite, nesses casos, aliar a convergência mais rápida do algoritmo de Newton-Raphson com a maior adequação do algoritmo de Fisher nas primeiras iterações quando N é grande (*Kendall & Stuart* [1979]). Por outro lado, na apresentação que se vai fazer, admite-se que a matriz \mathbf{X} tem característica p igual ao seu número de colunas. Quando $c(\mathbf{X}) \neq p$, existirá sub-identificação, sendo necessário recorrer ao conceito de inversa generalizada e a técnicas de alisamento dos parâmetros, casos cujo tratamento pode, por exemplo, ser visto em *McCullagh & Nelder* [1983].

Calcule-se então

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{d\theta_i}{d\mu_i} \right) \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \right) \quad (4.5)$$

ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= \frac{Y_i - \mu_i}{a_i(\phi)} \\ \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} &= \frac{d^2 b(\theta_i)}{d\theta_i^2} = \frac{\text{Var}(Y_i)}{a_i(\phi)} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} &= X_{ij} \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^N z_i X_{ij} \quad (4.6)$$

com

$$z_i = \frac{Y_i - \mu_i}{\text{Var}(Y_i)} \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) \quad (4.7)$$

ou seja

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\beta}} = \mathbf{X}' \underline{z} \quad (4.8)$$

sendo \underline{z} o vector de elemento genérico z_i com $i = 1, \dots, N$. Por outro lado

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \mathbf{X}' \frac{\partial \underline{z}}{\partial \beta_k}$$

e como

$$\frac{1}{\text{Var}(Y_i)} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} = \frac{1}{a_i(\phi)} \frac{d\theta_i}{d\mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} = \frac{1}{a_i(\phi)} \frac{d\theta_i}{d\eta_i}$$

então

$$\frac{\partial z_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_k} \frac{1}{\text{Var}(Y_i)} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} + \frac{Y_i - \mu_i}{a_i(\phi)} \frac{\partial \left(\frac{d\theta_i}{d\eta_i} \right)}{\partial \beta_k}$$

e portanto

$$E \left[\frac{\partial z_i}{\partial \beta_k} \right] = -\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_k} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \frac{1}{\text{Var}(Y_i)} = -\left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 \frac{X_{ik}}{\text{Var}(Y_i)}$$

obtendo-se assim a matriz da informação de Fisher ²

$$E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \underline{\beta} \partial \underline{\beta}'} \right] = \mathbf{X}' E \left[\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{\beta}'} \right] = -\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (4.9)$$

sendo \mathbf{W} uma matriz diagonal de elemento genérico W_{ii} dado por

$$W_{ii} = \left(\frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 \frac{1}{\text{Var}(Y_i)}$$

A aplicação do algoritmo dos scores de Fisher far-se-á através de

$$\underline{\beta}^{(s+1)} = \underline{\beta}^{(s)} - E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \underline{\beta} \partial \underline{\beta}'} \right]_{\underline{\beta}^{(s)}}^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial \underline{\beta}} \right]_{\underline{\beta}^{(s)}}$$

isto é no caso presente

$$\begin{aligned} \underline{\beta}^{(s+1)} &= \underline{\beta}^{(s)} + \left(\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}' \underline{z}^{(s)} \\ &= \left(\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X} \right) \underline{\beta}^{(s)} + \mathbf{X}' \underline{z}^{(s)} \right] \\ &= \left(\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X} \right)^{-1} \left[\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \left(\mathbf{X} \underline{\beta}^{(s)} + \left[\mathbf{W}^{(s)} \right]^{-1} \underline{z}^{(s)} \right) \right] \\ &= \left(\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X} \right)^{-1} \left[\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \left(\underline{\eta}^{(s)} + \left[\mathbf{W}^{(s)} \right]^{-1} \underline{z}^{(s)} \right) \right] \end{aligned}$$

²No caso da função de ligação ser canónica ($\theta_i = \eta_i$), então

$$\frac{d\theta_i}{d\eta_i} = 1$$

e portanto

$$\frac{\partial z_i}{\partial \beta_k} = E \left[\frac{\partial z_i}{\partial \beta_k} \right]$$

o que traduz a equivalência entre o algoritmo de Fisher e o de Newton-Raphson.

ou seja

$$\underline{\beta}^{(s+1)} = (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \underline{\tilde{z}}^{(s)}) \quad (4.10)$$

com

$$\tilde{z}_i^{(s)} = \eta_i^{(s)} + \frac{1}{W_{ii}^{(s)}} z_i^{(s)}$$

ou ainda

$$\tilde{z}_i^{(s)} = \eta_i^{(s)} + (Y_i - \mu_i^{(s)}) \left(\frac{d\eta_i}{d\mu_i} \right)^{(s)} \quad (4.11)$$

Em termos práticos o algoritmo desenvolver-se-á em 5 passos

1. Para $s=1$, partir de $\underline{\mu}^{(s)}$ - em geral $\mu_i^{(1)} = \bar{\mu}$ para $i = 1, \dots, N$ - e calcular $\underline{\eta}^{(s)}$.
2. Construir $\mathbf{W}^{(s)}$ e $\underline{\tilde{z}}^{(s)}$
3. Obter $\underline{\beta}^{(s+1)}$ através de (4.10), isto é recorrendo ao método dos mínimos quadrados ponderados.
4. Calcular $\underline{\eta}^{(s+1)}$ já que $\underline{\eta}^{(s+1)} = \mathbf{X} \underline{\beta}^{(s+1)}$ e $\underline{\mu}^{(s+1)}$ recorrendo à função de ligação.
5. Regressar à fase 2.

introduzindo-se o critério de paragem nas fases 2 e/ou 4.

Dum ponto de vista computacional, nada garante, no caso geral, a unicidade da solução, tendo Wedderburn [1976] estudado os casos mais frequentes. Deste estudo resulta que, para a Poisson não haverá problemas com funções de ligação do tipo $\eta = \mu^\alpha$ (admitindo que quando $\alpha = 0$ se tem a função logaritmo) para $0 \leq \alpha \leq 1$ enquanto que, no caso da distribuição Gama dever-se-á garantir $-1 \leq \alpha \leq 0$, supondo-se, como é óbvio a positividade dos parâmetros destas distribuições. No caso da normal, não se impondo restrições a μ , será no entanto necessário recorrer à ligação canónica para garantir a unicidade da solução.

1.2.2. Alguns exemplos

A regressão linear Este caso clássico corresponde a um modelo com

$$\underline{Y} \sim n(\underline{\mu}; \sigma^2 I_N)$$

e função de ligação identidade já que $\mu_i = \theta_i$, o que permite estabelecer

- $\mu_i = \eta_i$;
- $W_{ii}^{(s)} = \text{Var}(Y_i)^{-1}$, independente da iteração s , donde $W = \sigma^{-2} I_N$;
- $\tilde{z}_i^{(s)} = \eta_i^{(s)} + Y_i - \mu_i^{(s)} = Y_i$ independente também de s ;

e portanto,

$$\hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

o que, como seria de esperar, corresponde à expressão habitual. Refira-se que, no caso de haver heteroscedasticidade, a dedução mantém-se válida, não se reduzindo W ao produto duma constante pela matriz identidade, utilizando-se então os estimadores de Aitken com W^{-1} representando a matriz das variâncias/covariâncias de \underline{Y} .

O modelo loglinear de Poisson Neste quadro $Y_i \sim Po(\mu_i)$, sendo a função de ligação logarítmica, donde

- $\text{Var}(Y_i) = \mu_i$;
- $\frac{d\mu_i}{d\eta_i} = \mu_i$;
- $W_{ii} = \mu_i$;
- $\tilde{z}_i^{(s)} = \ln(\mu_i) + (Y_i/\mu_i) - 1$

e portanto

$$\underline{\beta}^{(s+1)} = (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \underline{\tilde{z}}^{(s)})$$

podendo-se sintetizar o processo de estimação num algoritmo com 5 etapas:

1. Fazer $s = 1$ e $\mu_i^{(1)} = \bar{Y}$.
2. Calcular $\mathbf{W}_{ii}^{(s)} = \mu_i^{(s)}$ e $\tilde{z}_i^{(s)} = \ln(\mu_i^{(s)}) + (Y_i/\mu_i^{(s)}) - 1$.
3. Obter $\underline{\beta}^{(s+1)} = (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W}^{(s)} \underline{\tilde{z}}^{(s)})$.
4. Fazer $s = s + 1$ e calcular $\mu_i^{(s)} = \exp(\mathbf{X}_i \underline{\beta}^{(s)})$.
5. Regressar à etapa 2.

sendo o critério de paragem introduzido na terceira etapa em função da variação verificada entre $\underline{\beta}^{(s+1)}$ e $\underline{\beta}^{(s)}$ ou, como é o caso nos programas que lidam com esta família de modelos, pela variação na "deviance", conceito que será formalizado na subsecção 1.3, mas que se pode particularizar a este caso como sendo

$$D^{(s)} = 2 \sum_{i=1}^N [Y_i \ln(Y_i/\mu_i) - (Y_i - \hat{\mu}_i^{(s)})]$$

introduzindo-se o cálculo de $D^{(1)}$ na etapa 1 e de $D^{(s)}$ no fim da etapa 4, condicionando-se na etapa 5 o regresso à etapa 2 apenas para os casos em que a variação³ absoluta entre $D^{(s+1)}$ e $D^{(s)}$ se situa acima de determinado limite.

1.2.3. Estimação do parâmetro de escala ϕ

Quando a distribuição de Y_i não envolve parâmetro de escala (caso da Poisson por exemplo), não haverá, como é óbvio, problema de estimação. Nos outros casos, dever-se-ia recorrer a uma estimativa de máxima verosimilhança, solução que pode tornar-se difícil do ponto de vista computacional na medida em que, não se tendo explicitado o estimador de $\underline{\beta}$, não é possível proceder à concentração da função de verosimilhança.

³Como adiante se verá, tratam-se de variações negativas, uma vez que a obtenção dos estimadores de máxima verosimilhança será equivalente à minimização de D .

Como solução alternativa, *McCullagh & Nelder* [1983], propõem o recurso a

$$\hat{\phi} = \frac{D}{n - p} \quad (4.12)$$

sendo D , a “deviance”, uma estatística que será abordada no ponto seguinte.

1.3. Qualidade do ajustamento

Um modelo linear generalizado, como qualquer outro modelo, representa um compromisso entre duas situações extremas, o *modelo mínimo* onde $\hat{\mu}_i = c$, independente de i e o *modelo completo* onde existem tantas variáveis exógenas independentes quantas observações o que leva a que $\hat{\mu}_i = y_i$. Se o primeiro modelo não traduz nenhuma relação causal, o segundo não efectua nenhuma condensação da informação para sublinhar os seus aspectos essenciais.

A estatística S - *McCullagh & Nelder* [1983] propõem então como medida de qualidade do ajustamento um teste do rácio de verosimilhanças, isto é que se compare a verosimilhança do modelo em estudo (e) com a verosimilhança do modelo completo (c), definindo a estatística S , chamada “deviance” à escala, através de

$$S = -2(L_e - L_c)$$

em que as funções L indicam os logaritmos das funções de verosimilhança dos modelos respectivos ou seja representando os estimadores do modelo completo com um “ \sim ” e os estimadores do modelo em estudo com um “ \wedge ”

$$S = -2 \sum_{i=1}^N \frac{Y_i (\hat{\theta}_i - \tilde{\theta}_i) - [b(\hat{\theta}_i) - b(\tilde{\theta}_i)]}{a_i(\phi)} \quad (4.13)$$

O recurso a tal estatística permite utilizar um resultado geral cuja demonstração pode, por exemplo, ser vista em *Kendall & Stuart* [1979] e que, por isso, apenas se enunciará.

Proposição 4.1 *Sejam dois modelos encadeados explicativos de Y com p_1 e p_2 parâmetros independentes respectivamente (admite-se, sem perda de generalidade,*

que o espaço dos parâmetros do primeiro modelo se encontra incluído no espaço dos parâmetros do segundo), então $S = -2(L_1 - L_2)$ tem distribuição aproximada do χ^2 com $(p_2 - p_1)$ graus de liberdade, situação que se verificará de forma exacta no caso do modelo normal com função de ligação canónica.

A "deviance" - No caso presente, já que $a_i(\phi) = \phi/w_i$ como se admitiu na especificação da distribuição de Y_i pode fazer-se $S = D/\phi$ onde a "deviance" D é definida por

$$D = -2 \sum_{i=1}^N w_i \{Y_i (\hat{\theta}_i - \tilde{\theta}_i) - [b(\hat{\theta}_i) - b(\tilde{\theta}_i)]\} \quad (4.14)$$

expressão que não contém qualquer incógnita depois de se obterem os estimadores da máxima verosimilhança já que pode ser reparametrizada em termos de $\hat{\mu}_i$ e de $\tilde{\mu}_i$, sem esquecer que $\tilde{\mu}_i = y_i$ já que se trata do modelo completo.

Podem no entanto utilizar-se outras medidas para a qualidade do ajustamento, nomeadamente a estatística do χ^2 de Pearson dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\text{Var}(\hat{\mu}_i)} \quad (4.15)$$

Em ambos os casos as estatísticas terão distribuição do χ^2 no caso do modelo normal com ligação canónica, obtendo-se apenas resultados assintóticos para o caso geral. Claro que com pequenas amostras, tais resultados constituirão uma fraca garantia, sendo preferível, quando possível, estudar as propriedades destas estatísticas em cada caso concreto.

A análise dos desvios - A análise dos desvios costuma ser feita recorrendo à aditividade da estatística S , construindo-se uma sucessão de modelos encadeados e estudando-se as variações que se verificam nesta estatística. Por outras palavras se o modelo 2 for constituído pelas p_1 variáveis do modelo 1 mais $(p_2 - p_1)$ novas variáveis (todas elas linearmente independentes), um teste de nulidade dos novos coeficientes poderá ser construído pela variação das estatísticas S respectivas que

terá, na hipótese H_0 de nulidade dos parâmetros, distribuição aproximada do χ^2 com $(p_2 - p_1)$ graus de liberdade.

Constroem-se assim quadros de análise da “deviance” à escala (ANODEV) generalizando os quadros habituais de análise da variância (ANOVA) da regressão linear, cuja interpretação deverá no entanto merecer bastantes cautelas no caso geral já que se tratam de distribuições aproximadas. Refira-se que nos casos em que o parâmetro de escala se encontre fixado no valor 1 (modelos de Poisson nomeadamente), a análise da estatística S reduz-se ao estudo da “deviance” D , uma vez que não existirão problemas de escala.

No apêndice ao “*User’s Guide*” do programa *GLIM*, Baker & Nelder [1987], numa boa síntese sobre os modelos lineares generalizados, referem outras possibilidades de diagnóstico, para não falar do capítulo que McCullagh & Nelder [1983] dedicam a este tema.

2. Modelos constituídos apenas por factores

Em muitas situações concretas todas as variáveis explicativas são constituídas por factores, isto é por variáveis discretas medidas numa escala nominativa. Tal acontece, por exemplo, na modelização da tarifa no seguro automóvel onde as variáveis explicativas costumam ser classes de diferentes tipos (idade do segurado, potência do veículo, ...), indicadores de localização (regiões, distritos,...) ou de qualidade (bonus/malus).

Nestas circunstâncias pode-se encarar o modelo como sendo formado por R células, com n_r ($r = 1, 2, \dots, R$) observações em cada uma delas, podendo-se então modelizar o fenómeno com base nas células em vez das apólices individuais, o que se torna particularmente interessante para carteiras volumosas quando os meios informáticos são limitados.

Foi neste contexto que Stroinski [1987] estabeleceu, para as distribuições de maior utilização prática, uma técnica de dedução dos estimadores de máxima verosimilhança baseada nos valores agregados por célula. Esta metodologia mais não

fez do que generalizar parcialmente a abordagem de *Ter Berg* [1980a], não tirando no entanto partido das potencialidades dos pontos iniciais sugeridos por *Ter Berg*.

2.1. Modelos agregados

A construção do modelo agregado é assim feita pelo reagrupar dos elementos individuais com características iguais o que se vai traduzir em dois aspectos fundamentais:

- Linhas idênticas na matriz X .
- A variável Y tem a mesma distribuição (forma funcional e parâmetros) para todos os elementos que integram a mesma célula.

Nestas condições o modelo agregado (cujos elementos vão ser referenciados com o símbolo $*$ para os diferenciar do modelo individual) irá utilizar uma matriz X^* com um número de linhas, R , bastante inferior ao da matriz X , todas elas distintas, já que para cada célula apenas se irá manter uma linha com as características desta célula. Constroi-se também um vector \underline{n} cujo r -ésimo elemento representa o número de elementos incluídos na célula r , passando o vector \underline{Y}^* a ser definido como o somatório das variáveis endógenas individuais, isto é

$$Y_r^* = \sum_{j=1}^{n_r} Y_j$$

admitindo-se, sem perda de generalidade, que a célula r corresponde às primeiras n_r observações do modelo individual.

Refira-se ainda que, num estudo prático como aquele que é desenvolvido no presente trabalho, a agregação do modelo reduz a dimensão das matrizes envolvidas em cerca de 100 vezes o que, em termos computacionais, permite ganhos muito substanciais quer no hardware envolvido, quer no tempo de CPU necessário à estimação dos diferentes modelos.

No ponto seguinte deduzem-se os estimadores para os parâmetros do modelo para se discutir posteriormente os critérios de aferição da qualidade do ajustamento quando se recorre a modelos agregados.

2.2. Dedução dos estimadores

Antes de proceder à dedução da função de verosimilhança do modelo agregado apresenta-se um teorema que serve de base a esta dedução.

Teorema 4.1 *Seja um universo com distribuição dada por*

$$X \sim \exp \left[\frac{\theta x - b(\theta)}{a(\phi)} + c(x, \phi) \right]$$

do qual se extraiu uma amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) composta por n elementos independentes. Então,

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \exp \left[\frac{\theta y - n b(\theta)}{a(\phi)} + c_n^*(y, \phi) \right] \quad (4.16)$$

sendo $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ as funções referidas anteriormente e c_n^ uma função que não depende de θ .*

Demonstração

Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a função de densidade conjunta da amostra, isto é

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp \left\{ \left[\theta \sum_{i=1}^n x_i - n b(\theta) \right] / a(\phi) + \sum_{i=1}^n c(x_i, \phi) \right\}.$$

Efectuando-se a mudança de variável definida por

$$\begin{cases} Y = \sum_{i=1}^n X_i \\ Z_i = X_i \end{cases} \quad i = 2, \dots, n$$

cuja transformação inversa será

$$\begin{cases} X_1 = Y - \sum_{i=2}^n Z_i \\ X_i = Z_i \end{cases} \quad i = 2, \dots, n$$

sendo fácil verificar que o Jacobiano vale 1, o que origina

$$g(y, z_2, \dots, z_n) = \exp \left[\frac{\theta y - n b(\theta)}{a(\phi)} + \sum_{i=2}^n c(z_i, \phi) + c \left(y - \sum_{i=2}^n z_i, \phi \right) \right].$$

Deduz-se então a função de densidade de Y

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(y, z_2, \dots, z_n) dz_2 \dots dz_n$$

ou seja

$$g(y) = \exp \left\{ \frac{\theta y - n b(\theta)}{a(\phi)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c \left(y - \sum_{i=2}^n z_i, \phi \right) \right] + \sum_{i=2}^n c(z_i, \phi) dz_2 \dots dz_n \right\}$$

donde definindo

$$c_n^*(y, \phi) = \ln \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=2}^n c(z_i, \phi) + c \left(y - \sum_{i=2}^n z_i, \phi \right) \right] dz_2 \dots dz_n \right\}$$

obtem-se

$$g(y) = \exp \left[\frac{\theta y - n b(\theta)}{a(\phi)} + c_n^*(y, \phi) \right]$$

como se queria demonstrar. ∇

A partir deste resultado, facilmente se estabelece a função de verosimilhança do modelo agregado cujo logaritmo será

$$L^*(\theta, \phi) = \sum_{r=1}^R \left[\frac{Y_r \theta_r - n_r b(\theta_r)}{a_r(\phi)} + c_{n_r}^*(y_r, \phi) \right]$$

sendo necessário adaptar a função de ligação à situação criada o que é feito através da função $g^*(.)$ que será definida por

$$g_r^*(\mu_r) = \frac{1}{n_r} g_r(\mu_r)$$

o que permite manter a relação (4.2) no modelo cumulado, isto é

$$\underline{\eta}^* = \mathbf{X}^* \underline{\beta}^*$$

Torna-se então simples deduzir, por um processo análogo àquele que se utilizou para o modelo individual, os estimadores de máxima verosimilhança para β^* obtendo-se

$$\underline{\beta}^* = (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{W}^* \mathbf{X}^*)^{-1} (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{W}^* \underline{\tilde{z}}^*) \quad (4.17)$$

tendo-se omitido os indicadores de iteração s por serem idênticos aos da expressão (4.10). Saliente-se ainda que

- $W_{rr}^* = z_r^* \frac{d\mu_r^*}{d\eta_r^*}$
- $\tilde{z}_r^* = \eta_r^* + (Y_r^* - \mu_r^*) \left(\frac{d\eta_r^*}{d\mu_r^*} \right)$.

2.3. Equivalência entre estimativas no modelo agregado e no modelo individual

A equivalência entre as estimativas obtidas nos modelos agregados e nos modelos individuais (isto é $\underline{\beta}^* = \underline{\beta}$) prova-se através do teorema seguinte.

Teorema 4.2 *Seja $\underline{\beta}$ o vector das estimativas obtidas pelo ajustamento do modelo individual, sendo $\underline{\beta}^{(0)}$ o vector das estimativas iniciais para os parâmetros. Seja ainda $\underline{\beta}^*$ o vector das estimativas obtidas para o modelo agregado com base no mesmo ponto inicial (isto é $\underline{\beta}^{(0)} = \underline{\beta}^{*(0)}$). Nestas condições*

$$\underline{\beta}^{(s)} = \underline{\beta}^{*(s)} \quad \text{para } s = 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

Demonstração

Seja então

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X} \\ \underline{v} = \mathbf{X}'\mathbf{W}\underline{z} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{A}^* = \mathbf{X}^{*'}\mathbf{W}^*\mathbf{X}^* \\ \underline{v}^* = \mathbf{X}^{*'}\mathbf{W}^*\underline{z}^* \end{cases}$$

Para demonstrar o teorema bastará mostrar que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ e que $\underline{v} = \underline{v}^*$ dado o processo iterativo de obtenção das estimativas - ver as relações (4.10) e (4.17).

Calcule-se então A_{kl} , elemento genérico da matriz \mathbf{A} .

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^N X_{ik} X_{il} W_{ii} = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} X_{(rj)k} X_{(rj)l} W_{(rj)(rj)}$$

onde o índice (rj) refere o j -ésimo elemento na célula r . Dada que numa mesma célula todos os elementos têm idênticas características,

$$A_{kl} = \sum_{r=1}^R n_r X_{rk} X_{rl} W_{rr} = \sum_{r=1}^R n_r X_{rk}^* X_{rl}^* W_{rr}$$

utilizando-se o índice r em termos do modelo individual para designar um elemento qualquer da célula r . Tendo presente que

$$W_{rr} = [\text{Var}(Y_r)]^{-1} (d\mu_r/d\eta_r)^2$$

$$W_{rr}^* = [\text{Var}(Y_r^*)]^{-1} (d\mu_r^*/d\eta_r^*)^2$$

$$\text{Var}(Y_r^*) = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^{n_r} Y_{(rj)}\right) = \sum_{j=1}^{n_r} \text{Var}(Y_{(rj)}) = n_r \text{Var}(Y_r)$$

$$(d\mu_r^*/d\eta_r^*) = n_r (d\mu_r/d\eta_r)$$

conclui-se que

$$W_{rr}^* = [\text{Var}(Y_r^*)]^{-1} (d\mu_r^*/d\eta_r^*)^2 = n_r W_{rr}$$

e portanto

$$A_{kl} = \sum_{r=1}^R X_{rk}^* X_{rl}^* W_{rr}^* = A_{kl}^*$$

Calcule-se agora v_k , elemento genérico de \underline{v}

$$v_k = \sum_{i=1}^N X_{ik} W_{ii} \tilde{z}_i = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} X_{(rj)k} W_{(rj)(rj)} \tilde{z}_{(rj)} = \sum_{r=1}^R n_r^{-1} X_{rk}^* W_{rr}^* \sum_{j=1}^{n_r} \tilde{z}_{(rj)}$$

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_r} \tilde{z}_{(rj)} &= \sum_{j=1}^{n_r} [\eta_r + (Y_{(rj)} - \mu_r) (d\eta_r/d\mu_r)] \\ &= n_r \eta_r + (d\eta_r/d\mu_r) \sum_{j=1}^{n_r} (Y_{(rj)} - \mu_r) \\ &= n_r \eta_r^* + n_r (d\eta_r^*/d\mu_r^*) (Y_r^* - \mu_r^*) \\ &= n_r \tilde{z}_r^* \end{aligned}$$

sendo os somatórios efectuados em j para os n_r elementos da célula r . Assim

$$v_k = \sum_{r=1}^R X_{rk}^* W_{rr}^* \tilde{z}_r^* = v_k^*$$

como se queria demonstrar. ∇

2.4. A Qualidade dos Ajustamentos

Ao passar do modelo individual para o modelo agregado, torna-se necessário ponderar em que medida as estatísticas que se utilizam para aferir a qualidade do primeiro tipo de modelos se mantêm adequadas à nova situação.

Não se verifica unanimidade entre os diversos autores que recorreram aos modelos lineares generalizados para situações em que apenas existem factores explicativos.

Enquanto em *Barter & al* [1980] se assiste à construção e discussão dos quadros ANODEV como se do modelo individual se tratasse, *Stroinski* [1987] critica fortemente tal atitude e defende que, quando se utilizam modelos agregados na estimação dos parâmetros, não se deve analisar a “deviance” destes modelos mas sim a dos modelos individuais correspondentes para se avaliar a qualidade do ajustamento antes de qualquer agregação.

Stroinski sugere então uma metodologia para obter, quando se trabalha com os modelos agregados com distribuição de Poisson, valores aproximados para esta estatística quando a média de ocorrências por célula é baixa já que se reagrupam os elementos para os quais $y \geq 3$ (Stroinski estava a modelizar a sinistralidade automóvel com uma média da ordem dos 12% utilizando a Poisson o que tornava a simplificação aceitável). Este método requer assim que se guarde alguma informação adicional para cada célula.

Antes de regressar a esta discussão apresentam-se alguns resultados que permitem clarificar o significado dos testes envolvidos quando se passa do modelo individual para o modelo agregado.

2.4.1. O conceito de erro puro

Dado um modelo constituído apenas por um conjunto de factores, define-se o *erro puro* como sendo a parcela da “deviance” do modelo, avaliada em termos individuais, que é atribuível ao facto de se ter seleccionado este conjunto específico de factores, isto é o menor valor possível para a “deviance”.

Antes de proceder a uma melhor explicitação deste conceito, estabelecem-se alguns resultados que irão permitir um melhor enquadramento do problema.

Teorema 4.3 *Num modelo constituído por R células, o menor valor da “deviance” avaliada em termos individuais é obtido quando*

$$\hat{\mu}_r = \bar{Y}_r \quad \text{para } r = 1, \dots, R \quad (4.19)$$

Demonstração

A demonstração será feita recorrendo à minimização da estatística S uma vez que $D = S/\phi$.

$$\begin{aligned} S &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{Y_i (\hat{\theta}_i - \tilde{\theta}_i) - [b(\hat{\theta}_i) - b(\tilde{\theta}_i)]}{a_i(\phi)} \\ &= -2 \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} \frac{Y_{(rj)} (\hat{\theta}_r - \tilde{\theta}_{(rj)}) - [b(\hat{\theta}_r) - b(\tilde{\theta}_{(rj)})]}{a_r(\phi)} \end{aligned}$$

já que se mantêm as hipóteses referentes a $a_i(\cdot)$, e portanto

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mu}_r} = \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_r} \frac{\partial \hat{\theta}_r}{\partial \hat{\mu}_r}$$

A anulação de $(\partial S / \partial \hat{\mu}_r)$ apenas pode provir de

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, R) \quad (4.20)$$

já que se deduz das hipóteses atrás explicitadas que $\frac{\partial \hat{\theta}_r}{\partial \hat{\mu}_r} \neq 0$ obtendo-se então o sistema de equações (4.20) cuja solução origina

$$-2 \sum_{j=1}^{n_r} \frac{Y_{(rj)} - b'(\hat{\theta}_r)}{a_r(\phi)} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

ou seja

$$-2 \sum_{j=1}^{n_r} \frac{Y_{(rj)} - \hat{\mu}_r}{a_r(\phi)} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

isto é

$$\hat{\mu}_r = \bar{Y}_r \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

como se queria demonstrar. ∇

O erro puro mais não será do que a "deviance" do modelo individual quando se verifica (4.19), ou seja, o erro puro corresponde ao desvio que se verifica supondo que, em cada célula, o valor estimado corresponde, em termos individuais, à média dos valores observados.

Em termos do modelo agregado, o modelo completo mais não representará do que a situação em que

$$\hat{\mu}_r^* = Y_r^* \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

isto é uma situação idêntica à anterior já que

$$\hat{\mu}_r^* = n_r \hat{\mu}_r \text{ e } Y_r^* = n_r \bar{Y}_r \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

Ora como se pode escrever a "deviance" à escala do modelo individual através de

$$S = -2 [(L_e - L_m) + (L_m - L_a)]$$

onde o índice m se refere ao modelo agregado completo, obtem-se

$$S = S^* + S_m$$

o que em termos de "deviance" se traduzirá por

$$D = D^* + E_p \quad (4.21)$$

O erro puro ("deviance", avaliada em termos individuais, do modelo agregado completo) será obtido através de (4.21) já que

$$\begin{aligned} D &= -2 \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} w_r \left\{ Y_{(rj)} (\hat{\theta}_r - \tilde{\theta}_{(rj)}) - [b(\hat{\theta}_r) - b(\tilde{\theta}_{(rj)})] \right\} \\ &= -2 \sum_{r=1}^R w_r \left\{ Y_r^* \hat{\theta}_r - \left(\sum_{j=1}^{n_r} Y_{(rj)} \tilde{\theta}_{(rj)} \right) n_r b(\hat{\theta}_r) + \left[\sum_{j=1}^{n_r} b(\tilde{\theta}_{(rj)}) \right] \right\} \\ D^* &= -2 \sum_{r=1}^R w_r^* \left\{ Y_r^* (\hat{\theta}_r^* - \tilde{\theta}_r^*) - [b^*(\hat{\theta}_r^*) - b^*(\tilde{\theta}_r^*)] \right\} \\ &= -2 \sum_{r=1}^R w_r \left\{ Y_r^* (\hat{\theta}_r - \tilde{\theta}_r^*) - n_r [b(\hat{\theta}_r) - b(\tilde{\theta}_r^*)] \right\} \end{aligned}$$

na medida em que $w_r^* = w_r$, $\hat{\theta}_r^* = \hat{\theta}_r$ e $b^*(.) = n_r b(.)$. Daqui resulta que

$$E_p = -2 \sum_{r=1}^R w_r \left\{ \left(Y_r^* \tilde{\theta}_r^* - \sum_{j=1}^{n_r} Y_{(rj)} \tilde{\theta}_{(rj)}^* \right) - \left[n_r b(\tilde{\theta}_r^*) - \sum_{j=1}^{n_r} b(\tilde{\theta}_{(rj)}^*) \right] \right\} \quad (4.22)$$

relembrando-se que $\tilde{\theta}_r^*$ representa a estimativa de θ quando se recorre ao modelo agregado completo isto é quando $\hat{\mu}_r^* = Y_r^*$ o que, como se viu, se traduzirá em termos do modelo individual por $\hat{\mu}_r = \bar{Y}_r$. A expressão (4.22) também se pode escrever

$$E_p = -2 \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} w_r \left\{ Y_{(rj)} (\tilde{\theta}_r^* - \tilde{\theta}_{(rj)}) - [b(\tilde{\theta}_r^*) - b(\tilde{\theta}_{(rj)})] \right\}$$

Antes de passar ao ponto seguinte, uma palavra apenas para sublinhar que a expressão das funções de ligação canônicas tem de sofrer uma alteração nos modelos agregados uma vez que $\mu_r^* = n_r \mu_r$, sendo portanto necessárias algumas cautelas na leitura do quadro 4.1 que foi construído para modelos individuais.

2.4.2. A estimação do parâmetro de escala

Quando se tratam de distribuições para as quais o parâmetro de escala ϕ necessita de ser estimado, é necessário relembrar que a forma como este é estimado origina estimativas diferentes conforme se esteja no modelo individual ou no modelo agregado. Assim

$$\hat{\phi} = \frac{D}{N - p}$$

enquanto

$$\hat{\phi}^* = \frac{D^*}{R - p}$$

o que origina

$$\hat{\phi} = \left(\frac{R - p}{N - p} \right) \phi^* + \frac{E_p}{N - p} \quad (4.23)$$

não se obtendo portanto a mesma estimativa. A determinação do erro puro permite no entanto deduzir ϕ a partir de ϕ^* . Sublinhe-se de qualquer forma as limitações inerentes a este processo de estimação do parâmetro de escala (sobretudo em termos do modelo agregado em que a solução proposta é perfeitamente desadequada), problema que se voltará a abordar no capítulo 11.

2.4.3. O recurso à "deviance"

Como se depreende do resultado (4.21) as variações dos valores da "deviance" serão independentes do nível de agregação com que se estimaram os modelos envolvidos, desde que se mantenha esta agregação constante para toda a cadeia.

Assim sendo, a polémica levantada por Stroinski resulta da confusão feita por este autor entre as variações da "deviance" numa cadeia de modelos onde se mantem a mesma agregação e os valores desta mesma "deviance". Se as primeiras são, como se mostrou, independentes da agregação já o segundo é fortemente

influenciado por qualquer agregação uma vez que está a comparar a verosimilhança do modelo corrente com dois referenciais distintos. Convém ter presente que um modelo definido em termos de células nunca poderá ser um modelo completo, a não ser no caso degenerado em que, em cada célula, todos os elementos têm exactamente o mesmo comportamento.

Curioso se torna também referir que, enquanto a aplicação da metodologia sugerida por Stroinski necessita que se guardem $3 \times R$ elementos adicionais (no caso dos modelos com distribuição de Poisson), poder-se-ia obter o valor exacto da "deviance" do modelo individual utilizando apenas cerca de meia dúzia de valores adicionais como se irá exemplificar num exemplo apresentado na subsecção seguinte.

De qualquer forma é importante sublinhar que, num modelo de Poisson com taxas médias de ocorrências tão baixas, a "deviance" avaliada em termos do modelo individual não se reveste de interesse significativo uma vez que conduz à aceitação de qualquer modelo como se pôde verificar nas modelizações feitas no capítulo 9. Neste campo seria ainda de referir a necessidade de introduzir mecanismos de correcção na aproximação ao χ^2 , à semelhança daqueles que se discutirão mais adiante.

Mas, mais importante do que continuar esta discussão, é reflectir um pouco sobre o significado da "deviance" num modelo agregado, ou melhor num modelo constituído apenas por factores.

A primeira constatação que se faz quando se analisam os estudos práticos realizados reside no facto do erro puro assumir valores muito superiores à "deviance" do modelo agregado, ou seja as conclusões a tirar da realização do teste à "deviance" para o mesmo modelo dependem em larga medida de este se basear no modelo individual ou no modelo agregado o que traduz o facto das principais limitações do modelo residirem nas variáveis omissas ⁴, facto que se prende directamente com a dispersão que existirá dentro de cada célula, como já se referiu.

⁴Tenha-se presente que, enquanto os graus de liberdade a utilizar no teste de S serão $(N-p)$, no teste de S^* apenas se utilizarão $(R-p)$ sendo p o valor correspondente ao número de parâmetros β que foram estimados.

Em segundo lugar é também necessário ter presente que ao calcular a “deviance” no modelo agregado apenas se está a avaliar a soma das ocorrências em cada célula e não a distribuição destas dentro das diferentes células. Tal fenómeno acontece também quando se recorre ao teste do χ^2 no modelo agregado.

Por último, não se pode deixar de referir que, a não ser no caso dos modelos com distribuição normal, a “deviance” à escala S (e o teste do χ^2 também) só assintoticamente terão distribuição do χ^2 . O distanciamento em relação a esta distribuição assumirá proporções diferentes em função dos modelos que se estiverem a analisar. Numa tentativa para resolver este tipo de problemas, alguns autores (Cordeiro & Paula [1989], Cordeiro [1983] ou Barndorff-Nielsen & Cox [1984] por exemplo), no seguimento da ideia sugerida por Bartlett [1937] para o rácio de verosimilhanças já que a “deviance”, como se sabe, mais não é do que uma forma de aplicar este teste aos modelos lineares generalizados, procuram determinar um coeficiente de correcção do enviesamento. No entanto, mesmo com as melhorias que um tal procedimento introduz, os problemas inerentes à interpretação do teste mantêm-se.

2.4.4. Dois exemplos

Distribuição normal Qualquer que seja a função de ligação escolhida, o desvio para o modelo individual pode ser escrito (ver quadro 4.1) através de

$$D = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\mu}_i)^2 = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} (Y_{(rj)} - \hat{\mu}_r)^2$$

dependendo μ_r , como é evidente, da função de ligação seleccionada. Esta expressão também se pode escrever como

$$\begin{aligned} D &= \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} (Y_{(rj)} - \bar{Y}_r)^2 + \sum_{r=1}^R n_r (\hat{\mu}_r - \bar{Y}_r)^2 \\ &= \sum_{r=1}^R n_r s_r^2 + \sum_{r=1}^R n_r (\bar{Y}_r - \hat{\mu}_r)^2 \\ &= \sum_{r=1}^R n_r s_r^2 + \sum_{r=1}^R \frac{(Y_r^* - \hat{\mu}_r^*)^2}{n_r} \end{aligned}$$

onde s_r^2 representará a variância da variável Y na célula r . Por outro lado, tendo em conta que, neste caso particular, $w_r = 1$, $b(\theta) = (1/2) \theta^2$, e que $\mu_r^* = n_r \theta_r$,

$$\begin{aligned} D^* &= -2 \sum_{r=1}^R \left(Y_r^* \frac{\hat{\mu}_r^* - Y_r^*}{n_r} - n_r \frac{\hat{\mu}_r^{*2} - Y_r^{*2}}{2 n_r^2} \right) \\ &= \sum_{r=1}^R \frac{(Y_r^* - \hat{\mu}_r^*)^2}{n_r} \end{aligned}$$

e portanto

$$E_p = \sum_{r=1}^R n_r s_r^2$$

resultado que também se poderia ter deduzido de (4.22).

Em termos computacionais bastará guardar como informação adicional

$$I_a = \sum_{i=1}^N Y_i^2$$

já que

$$E_p = I_a - \sum_{r=1}^R n_r \frac{Y_r^{*2}}{n_r}$$

podendo-se portanto deduzir os restantes valores a partir do modelo agregado.

Distribuição de Poisson Neste caso o desvio para o modelo individual escreve-se

$$D = 2 \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} Y_{jr} \ln(Y_{jr}/\hat{\mu}_r) - 2 \sum_{r=1}^R n_r (\bar{Y}_r - \hat{\mu}_r)$$

podendo deduzir-se a expressão do erro puro de (4.22) tendo-se presente que $w_r = 1$, $\theta = \ln(\mu)$ e que $b(\theta) = \exp(\theta)$ o que originará

$$\begin{aligned} E_p &= 2 \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} \left\{ Y_{(rj)} [\ln(Y_{(rj)}) - \ln(\bar{Y}_r)] - (Y_{(rj)} - \bar{Y}_r) \right\} \\ &= 2 \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} Y_{(rj)} \ln(Y_{(rj)}/\bar{Y}_r) \end{aligned}$$

podendo-se deduzir a "deviance" do modelo agregado a partir destes resultados

$$\begin{aligned} D^* &= D - E_p \\ &= 2 \sum_{r=1}^R [Y_r^* \ln(Y_r^*/\hat{\mu}_r^*) - (Y_r^* - \hat{\mu}_r^*)] \end{aligned}$$

Neste caso a obtenção do erro puro a partir dos dados agregados necessita do conhecimento adicional de

$$I_a = \sum_{i=1}^N Y_i \ln(Y_i)$$

Pela a importância que os modelos com distribuição de Poisson irão assumir neste trabalho eles serão objecto de um ponto autónomo, não se desenvolvendo aqui este tipo de modelo.

2.5. Alguns aspectos computacionais

Antes de analisar de forma mais pormenorizada os modelos baseados na lei de Poisson, com particular destaque para a função de ligação logarítmica, abordar-se-ão alguns problemas computacionais comuns a este tipo de modelos.

O primeiro ponto que parece necessário focar diz respeito à estimação em si mesma, ou melhor dizendo à construção da matriz \mathbf{X} no caso dos modelos compostos apenas por factores explicativos. Este procedimento é idêntico àquele que se segue habitualmente em econometria e consiste em desdobrar cada factor em variáveis "dummies" em número igual aos níveis assumidos pelo respectivo factor diminuído duma unidade. Acrescente-se ainda que se introduz obrigatoriamente um termo constante na relação linear.

Assim sendo e admitindo que existem F factores, assumindo cada um deles K_f valores ($f = 1, 2, \dots, F$), ter-se-ão R células (dadas pelas linhas de \mathbf{X}^*) avaliadas em função das P variáveis (colunas de \mathbf{X}^* ou de \mathbf{X} caso se persista no modelo individual) com

$$P = 1 + \sum_{f=1}^F (K_f - 1)$$

$$R = \prod_{f=1}^F K_f$$

correspondendo a primeira coluna ao termo constante. Tenha-se também presente que R corresponde à dimensão máxima podendo não existir algumas células.

O ganho de CPU, quando se trabalha com base no modelo agregado será tanto maior quanto mais pequeno for R em relação a N (número de indivíduos) já que

as matrizes têm um número idêntico de colunas. Nos casos práticos tal redução pode permitir passar de perto de 200000 linhas para 1000, valores que dependerão em larga medida da informação disponível já que, como se deduz, quanto mais discriminados e numerosos forem os factores maior será R .

Um segundo aspecto que é importante ter em conta consiste em ponderar entre o recurso a um "package" versátil do estilo GLIM ou a utilização de programas dedicados especificamente à situação que se está a tratar. Se os primeiros proporcionam maiores possibilidades em termos de formular diferentes modelos, os segundos costumam ser bastante mais eficientes, tirando partido das particularidades do problema concreto para o qual foram concebidos.

Como se sabe a pesquisa dos estimadores de máxima verosimilhança nos modelos lineares generalizados consiste num processo iterativo, para o qual assume particular importância a determinação do ponto inicial desta pesquisa. Enquanto o programa geral determinará o ponto de partida em termos genéricos, uma análise mais cuidada de cada situação poderá aconselhar a escolha de um ponto mais eficiente. A este propósito refira-se os trabalhos de *Ter Berg* [1980a] e [1980b] onde se sugerem pontos iniciais para o processo iterativo em diversas situações particulares, problema que será abordado no ponto seguinte.

Para além dos problemas inerentes ao ponto inicial, também se obtêm ganhos significativos em termos da formulação do processo iterativo, sendo muitas vezes possível definir de forma mais concreta os aspectos essenciais que a estimação vai abordar. Um caso extremo será o recurso ao GLIM para estimar um modelo de regressão linear, situação que não deixará de ser caricata.

Mas talvez mais importante do que os ganhos em termos de tempo de CPU e de necessidades de "hardware" pode ser a análise mais cuidada dos testes de qualidade do ajustamento, já que os procedimentos gerais apenas permitem definir resultados assintóticos, a não ser no caso do modelo de regressão linear em que existe um instrumental particularmente vasto. Neste aspecto particular parece existir um vasto campo em aberto se bem que, até agora, os diversos contributos tenham sido apenas para situações concretas. Não fugindo a esta regra, também se propõem, no ponto seguinte, alguns testes para os modelos de Poisson, que serão

objecto de um estudo de simulação.

3. Modelos com distribuição de Poisson

Os modelos lineares com distribuição de Poisson constituem um caso específico dos modelos lineares generalizados particularmente adequado à formalização de problemas do tipo daqueles que se discutem no presente trabalho. Pela importância prática de que se revestem e por permitirem abordar a problemática dos testes de qualidade dos ajustamentos nos modelos discretos pareceu adequado atribuir-lhes um tratamento autónomo.

A característica base dos modelos lineares com distribuição de Poisson, como não podia deixar de ser, é serem modelos lineares generalizados, isto é verificarem (4.1), (4.2) e (4.3), e $f(\cdot)$ ser uma distribuição de Poisson. Tal definição permite incluir nesta designação genérica uma variedade de modelos que se diferenciarão com base na função de ligação em que se basearem.

Dentro destas destacam-se as funções logarítmica, por ser a ligação canónica e por permitir uma formalização simples de modelos multiplicativos, e identidade por razões óbvias.

Na construção de tarifas para o seguro automóvel com base na frequência de sinistralidade é mais ou menos pacífico o recurso à Poisson, já o mesmo não se podendo dizer da escolha da função de ligação. Se por um lado os modelos multiplicativos (e consequente escolha da função logaritmo) permitem uma interpretação bastante clara dos diversos parâmetros, diversos autores ⁵ defendem uma melhor adequação da estrutura aditiva situação que se traduzirá pela escolha da identidade como função de ligação.

Refira-se no entanto que, ao modelizar fenómenos com médias baixas como é objectivo do presente trabalho, se torna necessário verificar que as estimativas obtidas nunca conduzem a valores não admissíveis para médias da Poisson. Como

⁵Veja-se nomeadamente o capítulo 3 para mais pormenores.

é evidente a ligação canónica garante tal pressuposto sendo necessários cuidados especiais nos outros casos.

A formalização dos modelos de Poisson em termos agregados, já que assumem particular interesse no âmbito deste trabalho, poderá fazer-se através de:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(y_r^* | \mu_r^*) = \frac{(\mu_r^*)^{y_r^*} e^{-\mu_r^*}}{y_r^*!} \\ \eta_r = \mathbf{X}_r \cdot \underline{\beta} \\ \eta_r = \begin{cases} \ln(\mu_r^*/n_r) \\ \mu_r^*/n_r \end{cases} \end{array} \right. \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (4.24)$$

tendo presente que apenas é válida uma das especificações apresentadas para a função de ligação, correspondendo a primeira à ligação logarítmica e a segunda à linear.

3.1. Dedução dos estimadores

Com base na especificação feita em (4.24) pode estabelecer-se, para cada uma das funções de ligação tratadas, os sistemas de equações a partir dos quais se podem deduzir os estimadores de máxima verosimilhança.

Seja então $L(\underline{\mu}^* | \underline{y}^*)$ o logaritmo da função de verosimilhança e, recorrendo à convenção habitual recorda-se que $\mu_r^* = n_r \mu_r$, donde

$$\begin{aligned} L(\underline{\mu} | \underline{y}^*, n_r) &= \sum_{r=1}^R [y_r^* \ln(n_r \mu_r) - n_r \mu_r - \ln(y_r^*!)] \\ &= - \sum_{r=1}^R \ln(y_r^*!) - \sum_{r=1}^R \mu_r^* + \sum_{r=1}^R y_r^* \ln(\mu_r^*) \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{r=1}^R \left(\frac{y_r^*}{\mu_r^*} - 1 \right) \left(\frac{d\mu_r^*}{d\eta_r} \right) X_{rj}$$

ou seja a anulação do gradiente conduzirá ao sistema

$$\sum_{r=1}^R \left(\frac{y_r^*}{\mu_r^*} - 1 \right) \left(\frac{d\mu_r^*}{d\eta_r} \right) X_r' = \bar{0} \quad (4.25)$$

Para o caso logarítmico a expressão (4.25) traduzir-se-á por

$$\sum_{r=1}^R n_r \exp(X_r \underline{\beta}) X'_r = \sum_{r=1}^R y_r^* X_r \quad (4.26)$$

e no caso da função identidade

$$\sum_{r=1}^R \frac{y_r^*}{X_r \underline{\beta}} X'_r = \sum_{r=1}^R n_r X'_r \quad (4.27)$$

Em termos computacionais a aplicação destes resultados em substituição do processo geral permite ganhos substanciais em termos de CPU. De qualquer forma trata-se de sistemas não lineares cuja solução dependerá duma pesquisa iterativa para a convergência da qual assume particular importância a escolha do ponto inicial.

Foi partindo desta constatação que *Ter Berg* [1980a] e [1980b] determinou pontos iniciais para estes processos iterativos para diferentes distribuições. Entre os modelos estudados por este autor conta-se o modelo loglinear de Poisson podendo no entanto o método apresentado ser generalizado para outros casos, nomeadamente quando a função de ligação é linear.

3.2. Determinação dos pontos iniciais

O processo de *Ter Berg* generalizado consistirá em construir, partindo da relação $\underline{\eta} = \mathbf{X}^* \underline{\beta}$, onde os elementos do vector $\underline{\eta}$ não são observáveis, um modelo, mesmo aproximado, onde se possa estimar $\underline{\beta}$ recorrendo às técnicas econométricas habituais nomeadamente aos estimadores de Aitken, isto é um modelo do tipo

$$\underline{Z} = \mathbf{V} \underline{\beta} + \underline{U} \quad (4.28)$$

em que o vector \underline{Z} e a matriz \mathbf{V} sejam observáveis e em que o vector \underline{U} tenha valor esperado nulo e matriz das variâncias/covariâncias, Ω , conhecida.

Nestas condições o ponto inicial para a pesquisa dos estimadores de máxima verosimilhança, $\underline{\beta}^0$, será obtido através de

$$\underline{\beta}^0 = (\mathbf{V}' \Omega^{-1} \mathbf{V})^{-1} (\mathbf{V}' \Omega^{-1} \underline{Z}) \quad (4.29)$$

Assim sendo o problema será chegar a (4.28) já que a passagem para (4.29) não levanta problemas.

Considere-se então o modelo apresentado em (4.24) e, seguindo um ponto de vista bayesiano, admita-se como distribuição à priori para μ_r uma distribuição imprópria dada por

$$p(\mu_r) \propto \mu_r^{-1}$$

o que origina como distribuição à posteriori para μ_r uma Gama, ou seja

$$p(\mu_r | y_r^*, n_r) = \mu_r^{y_r^* - 1} \exp(-n_r \mu_r) n_r^{y_r^*} (\Gamma(y_r^*))^{-1} \quad (4.30)$$

sendo necessário garantir $y_r^* > 0$ por forma a obter uma distribuição à posteriori própria.

3.2.1. O processo de Ter Berg

A partir deste resultado, *Ter Berg* [1980a], recorrendo a *Abramowitz & Stegun* [1970] apresenta valores aproximados para

$$\begin{cases} E[\ln(\mu_r)] \simeq \ln\left(\frac{y_r^* - \frac{1}{2}}{n_r}\right) \\ \text{Var}[\ln(\mu_r)] \simeq \left(y_r^* - \frac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases} \quad (4.31)$$

e re-escreve $\underline{\eta} = \mathbf{X}^* \underline{\beta}$ para o caso da função de ligação logarítmica somando aos dois membros da igualdade um vector de elemento genérico $E[\ln(\mu_r)]$ o que origina após algumas simplificações

$$E[\ln(\underline{\mu})] = \mathbf{X}^* \underline{\beta} + \{ E[\ln(\underline{\mu})] - \ln(\underline{\mu}) \}$$

o que sugeriu a *Ter Berg* um modelo do tipo de (4.28) com

$$Z_r = \ln\left(\frac{Y_r^* - \frac{1}{2}}{n_r}\right)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}^*$$

e, dada a independência entre células, a matriz Ω será diagonal de elemento genérico dado pela aproximação feita à variância de $\ln(\mu_r)$, isto é

$$\Omega_{rr} = \left(y_r^* - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

A partir daqui $\underline{\beta}^0$ é estabelecido recorrendo a (4.29).

3.2.2. O caso linear

Para tratar o caso linear bastará recorrer a (4.30) e deduzir

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\mu_r) = \frac{y_r^*}{n_r} = \bar{y}_r \\ \text{Var}(\mu_r) = \frac{y_r^{*2}}{n_r} = n_r \bar{y}_r^2 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

escrevendo-se agora os elementos de (4.28) como sendo

$$\begin{aligned} Z_r &= \bar{y}_r \\ \mathbf{V} &= \mathbf{X}^* \\ \Omega_{rr} &= n_r \bar{Y}_r^2 \end{aligned}$$

expressões que permitem calcular (4.29) sem dificuldade.

3.2.3. A qualidade das estimativas iniciais

Para aferir o interesse em recorrer aos pontos iniciais determinados pela metodologia de Ter Berg, *Andrade e Silva* [1991] procedeu, para o caso logarítmico, a um estudo de simulação que procurou, entre outros objectivos, responder a duas questões:

- Qual o ganho em recorrer a este ponto inicial e até que ponto este justifica a calculatória inicial necessária para determinar este mesmo ponto de partida.
- Qual a proximidade entre o ponto inicial e o ponto final na pesquisa dos estimadores de máxima verosimilhança, isto é, em que medida será possível obter um valor muito aproximado à estimativa final utilizando apenas o ponto de partida.

No referido trabalho ensaiaram-se um conjunto de 96 situações que permitiram tirar algumas conclusões cujo âmbito parece passível de generalização, uma vez que se teve o cuidado de simular valores diversos para os diferentes parâmetros.

Em primeiro lugar, o recurso aos estimadores de Ter-Berg como ponto inicial da pesquisa permite ganhos substanciais no tempo de CPU necessário para assegurar a convergência. Nas experiências feitas o tempo gasto com passagem pelos estimadores de Ter-Berg oscilou entre 10 e 30% do tempo necessário partindo de um ponto arbitrário (no caso ensaiado tratou-se da origem).

A resposta ao segundo problema necessitou do recurso à Diferença Quadrática Média percentual (DQM) e à Diferença Absoluta Média (DAM), também ela em %, definidas através de

$$DQM(\beta_j) = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{\beta}_j^{(i)} - \tilde{\beta}_j^{(i)})^2}{\beta_j}$$

$$DAM(\beta_j) = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\hat{\beta}_j^{(i)} - \tilde{\beta}_j^{(i)}|}{\beta_j}$$

em que o símbolo $\hat{\cdot}$ se refere aos estimadores MV e $\tilde{\cdot}$ aos TB, sendo i o índice da experiência.

O estudo realizado mostrou que os estimadores de Ter Berg constituem uma aproximação bastante aceitável aos estimadores de máxima verosimilhança, sendo de sublinhar 3 aspectos que parecem ter peso decisivo na qualidade da aproximação que se obtém:

- Número de elementos da população quer no conjunto quer por célula.
- Tipo de povoamento, com qualidade tanto maior quanto mais regular for a distribuição da população pelas diferentes células.
- Número médio de ocorrências associando-se melhores estimativas a distribuições de média mais elevada.

Destes pontos ressalta claramente que o factor essencial irá ser o número global de ocorrências por célula, já que todos os pontos focados apontam neste sentido. Tal situação realça a necessidade de uma ponderação adequada na estimação de modelos aplicados a fenómenos como a construção de tarifas no seguro automóvel,

já que se têm populações muito grandes com povoamentos muito irregulares e taxas individuais de ocorrências bastante baixas.

Sublinhe-se ainda que as grandes diferenças entre as estimativas obtidas por estes dois métodos têm origem em situações em que a população gerada origina um número de ocorrências muito inferior ao esperado o que tem por consequência mais significativa o obter de estimativas sem grande sentido em ambos os métodos podendo estas apresentar diferenças de vulto entre elas.

O recurso a estes estimadores como valores aproximados dos de máxima verosimilhança estará assim dependente em boa parte do grau de precisão que se desejar e do "hardware" disponível factor que avaliará o peso da calculatória associada à pesquisa iterativa.

3.3. A avaliação da qualidade do ajustamento

Constituindo estes modelos um caso particular dos modelos compostos apenas por factores, que foram abordados na secção 2 do presente capítulo, retoma-se a discussão então desenvolvida, completando-a com algumas observações próprias desta situação específica.

A primeira constatação que se torna necessário fazer consiste na inadequabilidade da "deviance" medida em termos do modelo individual para modelos com distribuição de Poisson quando a média de ocorrências é baixa. Para além das limitações que advêm do teste só ter validade assintótica, facilmente se mostra que esta estatística tem um comportamento claramente enviesado, variando em função de μ .

Para além disso, na generalidade dos modelos estimados, a esmagadora maioria da "deviance" era originada pelo erro puro, situação que se pode generalizar para todos os modelos com baixas médias de ocorrências nas diferentes células.

Um pequeno exemplo permite ilustrar estas ideias. Considere-se então um modelo uni-celular ⁶ com 10000 elementos onde as diferentes ocorrências se encontram perfeitamente distribuídas, isto é de acordo com os valores teóricos originados

⁶O problema também pode ser visto num âmbito mais lato considerando-se uma célula genérica

Quadro 4.2 - Frequência absoluta do número de ocorrências

Ocorrências	Frequência
0	9048
1	905
2	45
3	2
total	10000

Quadro 4.3 - "Deviance" com origem na estimação da média

Coef. erro	$\hat{\mu}$	Dev. originada
-50%	0.05	387.7
-30%	0.07	114.1
-	0.10	0.0
30%	0.13	74.8
50%	0.15	188.3
100%	0.20	612.3
Erro puro	-	4741.0

por uma lei de Poisson. Suponha-se também que a média de ocorrências era de 10%, o que origina os resultados apresentados no quadro 4.2.

Nesta situação o erro puro terá um valor de 4741.0 que se mostra incomparavelmente superior à parte da "deviance" com origem no modelo agregado mesmo para erros de estimação significativos para a média da célula, como se mostra no quadro 4.3.

Quando o número médio de ocorrências aumenta, verifica-se um maior equilíbrio de um modelo mais amplo caso em que os conceitos de erro puro e de "deviance" devem ser substituídos por contributos para cada uma destas estatísticas.

Para manter o raciocínio em termos tão genéricos quanto possível, indicam-se apenas valores que façam sentido para estes dois casos.

Quadro 4.4 - Erro puro em função da média de ocorrências

Coef. erro	$\mu = 3$		$\mu = 10$	
	$\hat{\mu}$	Dev. originada	$\hat{\mu}$	Dev. originada
-50%	1.50	11581.9	5.0	38643.3
-30%	2.10	3396.9	7.0	11342.1
-	3.00	0.0	10.0	0.0
30%	3.90	2260.8	13.0	7521.9
50%	4.50	5676.1	15.0	18898.9
100%	6.00	18418.1	20.0	61356.7
Erro puro	-	10939.5	-	10165.7

como se depreende do quadro 4.4 que foi construído com base em hipóteses semelhantes às do exemplo.

Pode-se aliás salientar o comportamento característico do erro puro quando o número médio de ocorrências aumenta, com uma zona de crescimento rápido até se atingir um valor máximo a partir do qual se inicia um lento decréscimo que tende para a média teórica, como se pode vê no gráfico 4.1.

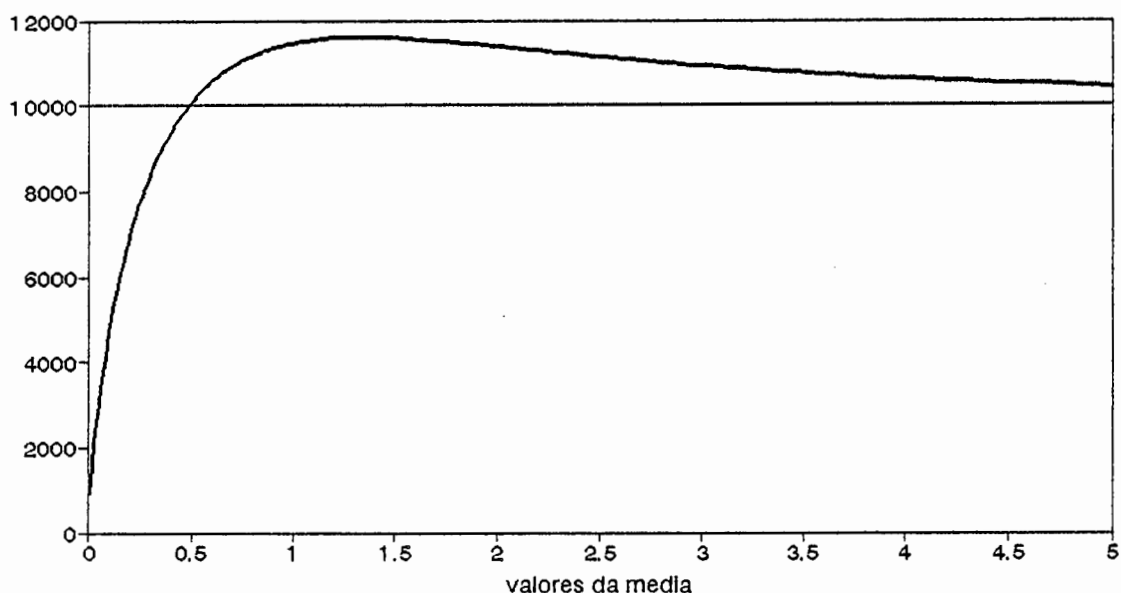
3.3.1. "Deviance" em termos agregados e quadros ANODEV

Posta de parte a "deviance" avaliada em termos do modelo individual, alguns comentários sobre a estatística equivalente calculada para o modelo agregado.

O primeiro para recordar que, num modelo agregado, D^* apenas toma em consideração o centro de gravidade de cada célula ou, o que é equivalente, Y_r^* que se deduz deste apenas se utilizando a distribuição postulada na obtenção das estimativas.

Também não deixa de ser verdade que tal situação não é exclusiva da "deviance", sendo também comum ao teste do χ^2 de bondade do ajustamento e traduz a síntese que se efectua ao reduzir uma célula ao seu centro de gravidade ponderado pela sua dimensão.

Gráfico 4.1 - Erro puro versus média



Estes testes apenas permitirão aferir se o modelo estimado é adequado em termos das médias obtidas para as diferentes células. Também a construção de quadros de análise da variação da “deviance” (ANODEV) em função dos factores incluídos continua pertinente na medida em que permite avaliar as melhorias com o acréscimo de variáveis, dentro das limitações já expostas.

Repete-se, uma vez mais, que é necessário não esquecer que as diferentes “deviance” têm de ser avaliadas com base no mesmo referencial para que se possa utilizar os resultados do teste à sua variação (ver pontos 1.3.1 e 2.4.3 do presente capítulo), que não deixam de ser assintóticos.

Um pequeno estudo de simulação permitiu fundamentar, muito embora não se esqueçam as limitações inerentes a este tipo de abordagens, a ideia de que uma dimensão significativa da população e um povoamento regular pelas diferentes células são elementos importantes para uma boa aproximação à lei do χ^2 . Nos modelos que irão ser estimados, a situação será discutível uma vez que a primeira condição se encontra satisfeita mas a distribuição da população é extremamente

irregular.

3.3.2. Duas propostas de novos testes

Uma vez que a principal limitação dos testes genéricos que foram apresentados reside em não tomarem em consideração de forma directa a distribuição das ocorrências dentro de cada célula, os testes que se propõem procuram responder a este problema, baseando-se no teste clássico do χ^2 à bondade do ajustamento.

O primeiro teste, T_1 , de âmbito mais global, irá testar se as diferenças entre as frequências absolutas de ocorrências observadas e esperadas dados os vectores $\hat{\mu}$ e \underline{n} são significativas, enquanto o segundo, T_2 , mais ambicioso procura esmiuçar a análise, debruçando-se sobre o comportamento dentro das células, pelo menos dentro das maiores.

Seja então c_k a frequência absoluta de observação de k ocorrências no conjunto da população e c_{kr} a mesma frequência dentro da célula r , representando-se como habitualmente os valores estimados com recurso ao símbolo $\hat{\cdot}$. Parece claro que

$$\hat{c}_k = \sum_{r=1}^R \hat{c}_{kr}$$

e dadas as hipóteses feitas

$$\hat{c}_{kr} = n_r e^{-\hat{\mu}_r} \hat{\mu}_r^k (k!)^{-1}$$

ou seja

$$\hat{c}_k = \sum_{r=1}^R n_r e^{-\hat{\mu}_r} \hat{\mu}_r^k (k!)^{-1}$$

consistindo o teste T_1 em efectuar um teste do χ^2 dado por

$$T_1 = \sum_{k=0}^{K^*} \frac{(c_k - \hat{c}_k)^2}{\hat{c}_k} \quad (4.33)$$

tendo-se tido o cuidado de reagrupar na aba direita, que se designou por K^* todos os casos para os quais k não permite obter \hat{c}_k superior a certo valor de referência (em geral em torno de 5).

O segundo teste baseia-se numa filosofia semelhante mas procurando uma análise mais fina. Para tal efectua-se uma partição do conjunto de células em dois sub-grupos o primeiro composto pelas células com grande número de elementos (supõe-se, sem perda de generalidade que se tratam das primeiras R_1 células), reagrupando-se as restantes numa única célula a que se dará o índice 0. Passa-se assim de uma população dividida em R células para uma divisão em $(R_1 + 1)$ classes.

O critério de separação entre grandes e pequenas células baseia-se na possibilidade de efectuar, dentro da célula, um teste do χ^2 , situação que se fez depender do número estimado de elementos com 2 ou mais ocorrências ser superior ao tal limite de referência.

O teste consistirá então em agregar os $(R_1 + 1)$ testes parciais, tendo o cuidado de se proceder para a classe 0 como no teste T_1 , podendo-se escrever

$$T_2 = \sum_{r=0}^{R_1} \sum_{k=0}^{K_r^*} \frac{(c_{kr} - \hat{c}_{kr})^2}{\hat{c}_{kr}} \quad (4.34)$$

onde K_r^* representa o maior número de ocorrências a considerar na classe r o que, dada a hipótese formulada $K_r^* \geq 2$.

Se, pela filosofia que presidiu à sua elaboração, parece adequado propor uma distribuição assintótica do χ^2 para estes testes, já a determinação do número de graus de liberdade a considerar é tema mais polémico.

De facto para obter T_1 recorreu-se aos P parâmetros estimados pela máxima verosimilhança mas de forma indirecta já que se reagruparam todas as células, apenas se considerando a frequência absoluta associada às possíveis ocorrências. Devem-se assim considerar $(K^* - 1)$ graus de liberdade referentes às $(K^* + 1)$ classes, descontando-se 1 grau de liberdade pela estimação do parâmetro da distribuição.

A situação para o segundo teste é mais controversa na medida em que este se compõe de duas parcelas principais, a primeira efectuada nas R_1 células consideradas individualmente e a segunda sobre uma célula proveniente do reagrupar das $(R - R_1)$ restantes. O número de graus de liberdade será assim dado por

$$G = \sum_{r=0}^{R_1} (K_r^* - 1) - (p_1 + 1)$$

onde p_1 representa o número de parâmetros estimados pela máxima verosimilhança que foram utilizados na estimação das R_1 células que mereceram tratamento autónomo. Por uma questão de coerência ter-se-á de garantir

$$\sum_{r=1}^{R_1} (K_r^* - 1) > p_1$$

Este processo sublinha a fragilidade inerente ao teste T_2 , dado que uma pequena alteração do critério que origina o conjunto de células a tratar individualmente pode afectar significativamente a contagem dos graus de liberdade a ter em conta.

Dadas as cautelas que parecem necessárias, procedeu-se a um pequeno estudo de simulação por forma a avaliar o comportamento destes dois testes, aproveitando-se o ensejo para analisar o comportamento das restantes estatísticas de teste em modelos semelhantes àqueles que se vão estimar.

3.3.3. O comportamento dos testes propostos

A situação de teste foi definida de forma a ser representativa das situações que se vão encontrar, tendo-se seleccionado as apólices que permaneceram na carteira durante o ano de 1987 e tendo-se recorrido à estrutura tarifária em vigor, situação que corresponde ao primeiro modelo apresentado em *Andrade e Silva* [1989].

Preparação do processo Estimou-se então o vector $\underline{\beta}$ a partir do qual se fixaram as médias de participações em cada uma das 85 células. Para além do vector $\underline{\mu}$ assim determinado, também se recorreu ao peso relativo de cada uma das células, n_r ($r = 1, \dots, R$).

Simulação O processo de simulação pode ser apresentado em duas fases:

- A - Para cada um dos n_r elementos da célula r , gerou-se aleatoriamente uma observação de $Y_{(rj)}$ que se supõe ter uma distribuição de Poisson de parâmetro μ_r . Repetiu-se este processo para as R células.

Com base nas observações geradas, estimou-se o vector $\underline{\beta}$, admitindo um modelo loglinear, e calcularam-se as diferentes estatísticas de teste ("deviance" avaliada em termos individuais e agregados, teste do χ^2 às médias nas células, e testes propostos), tendo-se guardado os valores obtidos.

Sublinhe-se ainda que para além dos elementos individuais necessários para a realização de alguns dos testes e que já foram expostos, a estimação do modelo é feita na sua forma agregada o que permite tratar uma estrutura com 85 células não vazias em vez de mais de 150000 observações.

B - Repetiu-se o processo descrito no item anterior 1000 vezes, obtendo-se assim outras tantas observações de cada uma das estatísticas de teste.

Avaliação dos resultados No quadro 4.5 apresentam-se os elementos mais significativos para apreciar os resultados obtidos. Entre estes, saliência particular para os parâmetros das distribuições empíricas das diferentes estatísticas, bem como para alguns percentis mais significativos para definir o perfil destas distribuições e a zona crítica, isto é a zona onde se vão efectuar os testes. Os resultados do teste T_2 foram desdobrados em dois grupos por corresponderem a estatísticas com diferentes graus de liberdade.

Refira-se ainda que também se efectuou um teste do χ^2 às diferenças entre as distribuições teóricas e empíricas baseado em intervalos de 5 em 5 % (apenas no caso do segundo grupo referente a T_2 se utilizaram decis dado o menor número de elementos).

A primeira constatação que se tira do quadro 4.5 será a completa desadequação da "deviance" individual. As restantes estatísticas, com excepção de T_1 , apresentam um enviesamento mais ou menos significativo, quer quando se observa o perfil da distribuição quer quando se efectua o teste do χ^2 .

Este enviesamento não tem comportamento regular, originando uma distribuição mais concentrada do que a teoricamente esperada para a "deviance" agregada enquanto o comportamento do teste do χ^2 às médias das células tem

Quadro 4.5 - Resultados da simulação

		Dev. Ind.	Dev. Agre.	χ^2	T_1	T_2	
g.l. teóricos		151663	74	74	2	18	17
média		49384	71.19	74.05	1.95	19.39	17.70
variância		126208	121.70	298.85	3.78	40.45	47.25
nº observ.		1000	1000	1000	1000	901	91
P e r c e n t i s	10 %	48394	57.27	53.75	0.21	12.16	9.94
	20 %	49088	61.40	59.89	0.42	14.01	12.18
	30 %	49185	64.98	64.40	0.67	15.71	12.91
	40 %	49285	67.89	68.42	1.02	17.29	14.71
	50 %	49369	70.90	72.03	1.38	18.42	16.48
	60 %	49472	73.78	76.29	1.78	19.93	17.75
	70 %	49567	76.58	80.78	2.31	21.91	20.04
	80 %	49684	80.16	85.82	3.10	24.18	23.05
	90 %	49850	86.09	96.01	4.52	27.55	26.34
	95 %	49985	91.04	104.68	5.94	31.58	29.37
	99 %	50425	98.03	128.06	8.23	38.08	—
t e s t e	χ^2	—	82.52	222.16	13.20	62.26	10.21
	g. lib.	—	19	19	19	19	9
	sig.(%)	—	0.00	0.00	82.82	0.00	33.38

comportamento contrário. Para a "deviance" existem, como já se salientou, mecanismos de correcção do enviesamento. De qualquer forma o comportamento na aba direita das distribuições empíricas não é muito distante dos valores teóricos se bem que neste caso também se assista a situações trocadas; a "deviance" é menos severa do que o valor assintótico registando-se a situação contrária para o χ^2 .

O teste T_1 apresenta um comportamento quase perfeito com o único senão de ter uma dispersão ligeiramente inferior à esperada mas sem consequências significativas na aba direita da distribuição.

A análise do teste T_2 merece maiores cautelas já que como se previa o seu comportamento é um tanto frágil. A parcela correspondente aos 17 graus de liberdade não apresenta problemas sendo no entanto de sublinhar que apenas cobre 91 dos 1000 ensaios realizados. A parcela principal tem um comportamento curioso já que parece plenamente adequado a uma χ^2 com 19 em vez de 18 graus de liberdade. Tal facto deve-se a autonomização de uma célula com 699 elementos e 102 ocorrências que origina a inclusão só por ela de um parâmetro adicional. Refira-se aliás que a parcela secundária corresponde aos casos em que esta célula não mereceu tratamento individual. Caso se definisse a fronteira em 7 elementos com duas ou mais ocorrências em vez dos 5 utilizados os resultados sofreriam provavelmente alterações de monta. O aspecto mais saliente deste teste parece assim residir não na distribuição a considerar já que o seu comportamento é característico de uma χ^2 mas sim na determinação dos graus de liberdade a considerar.

Em suma a conclusão a retirar deste estudo será a prudência que é necessário ter quando se efectuam estes testes estatísticos sendo de sublinhar que o teste T_1 parece ser o mais adequado.

Capítulo 5

Sistemas de Bonus

Qualquer que seja o modelo escolhido para formalizar a tarifa, torna-se quase obrigatório definir um sistema de agravamentos/bonificações em função das participações feitas por cada apólice no decorrer dos últimos anos. Com efeito, não existe, na hora actual, quase nenhuma tarifa que não tenha em conta, em maior ou menor grau, este mecanismo já que origina uma melhor adequação dos prémios cobrados aos riscos aceites pela companhia e permite avaliar, mesmo que apenas de forma indirecta, algumas características importantes que não são directamente mensuráveis. Para além disso ele também serve de dissuasor para a participação dos pequenos sinistros, onde os custos administrativos para a seguradora eram muito pesados face às indemnizações.

De facto a primeira característica (maior adequação dos prémios aos riscos) insere-se no sentido actual de entendimento da justiça social e, na óptica dos seus defensores, leva os segurados a uma maior prudência ¹ já que esta originará compensações monetárias.

O segundo ponto (correcta avaliação dos riscos), apresentando óbvias vantagens na optimização dos custos para a seguradora, pode no entanto revelar-se

¹Numa abordagem bastante original *Henriet & Rochet* [1986] mostram que existe uma certa contradição entre a construção do sistema mais justo, isto é onde se procure uma avaliação tão exacta quanto possível da propensão ao sinistro de cada segurado, e a definição do sistema que origine um maior incitamento à prudência.

perigoso se não for cuidadosamente enquadrado. Ao fomentar o auto-seguro para os pequenos sinistros por parte dos segurados por forma a não sofrer penalizações nos prémios futuros, fenómeno conhecido como a *sede de bonus* ², a seguradora passará a não ter elementos sobre a frequência com que os segurados sofrem (com ou sem responsabilidade própria) pequenos sinistros, sendo no entanto bastante provável que um segurado que esteja sempre envolvido nestes casos tenha uma propensão acrescida para sinistros declaráveis. Tal situação, com maior peso nas áreas urbanas, sublinha a necessidade de manter a *sede de bonus* dentro de limites aceitáveis.

O estudo teórico dos sistemas de bonus é feito de forma autónoma face aos factores mensuráveis à priori, nomeadamente no que toca à definição do sistema a implementar, podendo existir na fase derradeira de definição dos parâmetros da tarifa uma estimação conjunta por forma a evitar uma dupla penalização (veja-se por exemplo Ruygt [1982] ou Andrade e Silva [1989]). Embora neste trabalho se tenha procurado definir uma metodologia que permita integrar estes dois aspectos fundamentais na estimação da tarifa, entendeu-se mais adequado começar por apresentar os sistemas de bonus para, no capítulo 10, se fundamentar uma abordagem conjunta.

Assim, começar-se-á por definir o conceito de *sistema puro de bonus* na secção 1, para abordar em termos teóricos, na secção seguinte, a construção e avaliação deste tipo de sistemas. Na secção 3 ir-se-ão comparar as diferentes propostas, admitindo-se condições semelhantes às que vigoram em Portugal. Por fim, na secção 4, discute-se a *sede de bonus* enquanto a última secção destina-se a apresentar possíveis generalizações dos sistemas puros para os tornar mais maleáveis.

²Para além do comportamento óptimo do segurado ser definido em termos de uma análise custo-benefício em universo aleatório, alguns autores referem que no caso do automóvel também jogam motivações psicológicas que geram níveis de retenção, isto é valores limites para declarar os sinistros, bastante mais elevados do que aqueles que se poderiam definir como óptimos (veja-se a secção 4).

1. O conceito de sistema puro de bonus

1.1. Definição

Designa-se por sistema puro de bonus uma tarifa que respeite as seis características seguintes:

1. As apólices têm validade por períodos de idêntica duração, geralmente um ano, não se tendo em conta, por irrelevante, a existência dos anos bissextos.
2. O sistema é constituído por um número finito de classes (designado por K), classes essas que vão induzir uma partição na carteira.
3. As transições entre classes do sistema só se verificam no fim de cada período, permanecendo os segurados numa mesma classe durante cada período de validade da apólice, na medida em que as participações feitas num período só têm consequências em termos da classe para a qual a apólice irá transitar no período seguinte.
4. Em cada classe j vai vigorar um prémio $\pi(j)$ idêntico para todas as apólices pertencentes a esta classe. Admite-se ainda que as classes estão ordenadas por ordem crescente de importância dos riscos, isto é, sendo i e j duas classes do sistema com $i < j$, ter-se-á na classe i os riscos considerados menos gravosos para a seguradora, a que deverão corresponder prémios menores.
5. Os novos segurados entram no sistema na classe k que se designa como *classe inicial* do sistema.
6. Definem-se ainda as regras de transição (T) entre as diferentes classes do sistema, regras essas que só poderão ter em conta a classe onde a apólice se situa no período e o sucedido neste ano de vigência da apólice. Para tornar mais claros alguns pontos desenvolvidos nas secções seguintes, defina-se ainda $R = (T, k)$ como as regras do sistema.

1.2. Alguns comentários

Como facilmente se depreende o quarto ponto, ao definir um prémio idêntico para todas as apólices situadas na mesma classe, está na origem da designação destes sistemas como *sistemas puros*. Na grande maioria dos casos as tarifas em vigor recorrem a sistemas mistos, isto é conjugam uma avaliação dos factores conhecidos à priori com aquela que se baseia nos sistemas de bonus. Uma utilização directa dos sistemas puros originaria sistemas de bonus distintos para cada combinação dos factores directamente observáveis, situação que tornaria a tarifa extremamente pesada e complexa. O estudo dos sistemas puros é feito por razões de simplicidade não deixando porém de levantar alguns problemas quando se pretende integrar estes sistemas na estrutura geral de uma tarifa mista.

Em segundo lugar, refira-se que o ponto 2 traça uma fronteira (teoricamente pelo menos) entre sistemas puros e modelos baseados na teoria da credibilidade quer numa visão mais clássica (ver a secção 3 do capítulo 3) quer numa visão mais elaborada como os modelos de credibilidade com factores geométricos (*Sundt* [1988] por exemplo) para os quais o número de classes é infinito. Tal fronteira não deixa porém de ser mais teórica do que prática já que, se se fixar um número máximo de períodos para a permanência das apólices na carteira e se se admitir um número máximo de participações por ano, o número de classes torna-se finito em termos de teoria da credibilidade, não deixando no entanto de ser bastante grande.

Tenha-se também presente que existem sistemas concretos de bonus com número não limitado de classes, casos de Portugal (se é que se pode dizer que existe um sistema de bonus) ou da Noruega por exemplo, já que nestes países existe sempre uma penalização adicional por cada nova participação. Este problema não assume no entanto grande significado prático, quer porque o número de apólices nas piores classes é quase insignificante ³ quer porque a probabilidade de cometer, num período, mais do que um certo número de acidentes é praticamente nula.

³*Neuhaus* [1987] adianta que na Noruega, reduzindo o sistema a 13 classes, apenas 1% das apólices ficam na pior classe, enquanto na carteira analisada neste trabalho menos de 0.25 % das apólices figuravam com agravamento superior ou igual a 100 %.

A importância dos outros pontos reside na definição do sistema em si-mesmo, nomeadamente o sexto ponto que permite a sua fácil adaptação por forma a ser interpretado como uma cadeia de Markov gozando de propriedades importantes.

No quadro do processo de risco descrito na secção 3.3 do capítulo 3, bastará relembrar que, dado θ , X_n e $X_{n'}$ são independentes, para que o sistema forme uma cadeia de Markov homogénea cujo espaço dos estados seja dado pelo conjunto das K classes do sistema.

Por outro lado, se apenas se considerarem os sistemas de regras de transição que não permitem a formação de qualquer sub-grupo de classes absorvente, e dada a existência de uma classe de elite (a classe $j = 1$) onde após um número suficientemente grande de anos sem participações ⁴ todas as apólices vão parar, ter-se-á uma cadeia irredutível garantindo-se assim a existência de distribuição estacionária.

Neste quadro, definindo $\mathbf{P}_{R,\theta}$ como sendo a matriz das probabilidades de transição num passo, dado θ e um sistema de regras de transição \mathbf{R} , e $\underline{p}_{R,\theta}^{(n)}$ como o vector das probabilidades dos diferentes estados da cadeia no momento n , então

$$\begin{cases} \underline{p}_{R,\theta}^{(1)} = \underline{e}_k \\ \underline{p}_{R,\theta}^{(n)} = (\mathbf{P}_{R,\theta}^T)^{n-1} \underline{e}_k \end{cases} \quad \forall \theta \quad (5.1)$$

com \underline{e}_k vector de elementos todos nulos com excepção do k -ésimo que vale 1.

Sendo a cadeia irredutível, a matriz $\mathbf{P}_{R,\theta}^T$ terá como maior valor próprio (em módulo) 1 e existirá um vector próprio associado com este valor próprio que traduzirá a distribuição estacionária, depois de devidamente normalizado através de

$$\sum_{i=1}^K \tilde{p}_{R,\theta}(i) = 1$$

onde $\tilde{p}_{R,\theta}(i)$ representa o i -ésimo elemento do vector próprio normalizado.

⁴Ter-se-á também de admitir que $\text{Prob}(X_n = 0) > 0, \forall n$.

2. Construção e eficiência dos sistemas de bonus

Os problemas inerentes à construção e avaliação dos sistemas de bonus/malus, sendo embora distintos, não deixam de apresentar forte complementaridade. De facto, existindo um critério de eficiência, ser-se-á levado a construir um sistema de bonus que maximize esta eficiência e, inversamente, ao definir um sistema de bonus tentar-se-á construir um critério que avalie a eficiência do sistema construído.

Este par de problemas, no âmbito dos sistemas de bonus, foi abordado por duas vias que se irão apresentar noutras tantas sub-seções.

2.1. A abordagem pela elasticidade

Esta via de análise parte do artigo de *Loimaranta* [1972] que conheceu grande aceitação prática e foi posteriormente generalizado por outros autores entre os quais se destaca *Lemaire* [1985]. No seu trabalho *Loimaranta* começa por definir um critério que permita avaliar o comportamento de um sistema de bonus dado, exigindo-se apenas que forme uma cadeia de Markov irredutível, para, num segundo tempo, definir uma escala óptima recorrendo ao conceito de *variância mínima*. No entanto a dedução feita recorre a um conjunto de hipóteses extremamente discutíveis para não falar da fundamentação do critério em si-mesmo.

Assim sendo optou-se por não apresentar este segundo aspecto, remetendo-se o leitor interessado para *Loimaranta* [1972] ou *Andrade e Silva* [1988]. Após discutir o critério de *Loimaranta*, abordar-se-á a generalização proposta em *Lemaire* [1985].

2.1.1. O critério de Loimaranta

Dadas as regras do sistema, R , a escala de prémios π , e o parâmetro de risco θ , seja $\pi^{(n)}(\theta)$ o prémio médio a ser pago por uma apólice no período n

$$\pi^{(n)}(\theta) = \sum_{j=1}^K \pi(j) p_{R,\theta}^{(n)}(j)$$

onde $p_{R,\theta}^{(n)}(j)$ representa a probabilidade da apólice estar na classe j no período n .

Formando o sistema uma cadeia de Markov irredutível, Loimaranta vai trabalhar com a distribuição estacionária definindo

$$\pi(\theta) = \sum_{j=1}^K \pi(j) p_{R,\theta}^{(0)}(j) \quad (5.2)$$

como prêmio médio quando impera a distribuição estacionária (o índice 0 refere-se a esta distribuição).

Introduzem-se então algumas simplificações sobre o processo de risco, a saber a independência entre Y_{nj} e M_n e entre Y_{nj} e $\theta \forall j, n$ o que permite trabalhar apenas com o número de participações, desprezando-se o montante destas, já que

$$E(X_n|\theta) = E\left(\sum_{j=0}^{M_n} Y_{nj}|\theta\right) = E(M_n|\theta) E(Y) \quad (5.3)$$

admitindo-se ainda que $E[M_n(\theta)]$ é função linear de θ o que permite a escolha dum referencial monetário tal que $E(X_n|\theta) = \theta$.

O critério de eficiência $\eta(\theta)$ vai então avaliar a elasticidade do prêmio médio face ao parâmetro de risco ⁵, eficiência que será tanto melhor quanto mais próxima de 1 estiver a elasticidade.

$$\eta(\theta) = \frac{\frac{d\pi(\theta)}{\pi(\theta)}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \frac{d\pi(\theta)}{d\theta} \frac{\theta}{\pi(\theta)} \quad (5.4)$$

Sendo a interpretação do critério imediata, apenas se farão breves comentários sobre $\eta(\theta)$:

- O caso $\eta(\theta) < 0$ não faz sentido já que faz corresponder a um acréscimo de sinistralidade uma diminuição de prêmio médio.

⁵O critério de Loimaranta não necessita em rigor das hipóteses simplificadoras introduzidas já que pode ser definido em relação ao montante total esperado de indemnização por cada apólice,

$$\eta(\theta) = \frac{d\pi(\theta)}{dE(X_n|\theta)} \frac{E(X_n|\theta)}{\pi(\theta)}.$$

- O caso $0 < \eta(\theta) < 1$, situação mais frequente, corresponde a um sistema amortecido onde os efeitos nos prémios são menores do que os acréscimos na propensão à sinistralidade. A situação $\eta(\theta) > 1$ represento o caso oposto, isto é um sistema ampliado. A situação limite $\eta(\theta) = 1$ pode ser considerada como óptima.
- Facilmente se prova que a eficiência não pode ser óptima para todo o θ já que:

$$- \eta(\theta) = 0 \text{ para } \theta = 0$$

- para $\theta > \theta_0$ a probabilidade da apólice estar na pior classe ($j = K$) torna-se 1 e então

$$\frac{dp_{R,\theta}^{(0)}(j)}{d\theta} = 0 \quad \forall j$$

e portanto

$$\frac{d\pi(\theta)}{d\theta} = \sum_{j=1}^K \pi(j) \frac{dp_{R,\theta}^{(0)}(j)}{d\theta} = 0$$

ou seja $\exists \theta_0 : \eta(\theta) = 0$ para $\theta > \theta_0$.

- daqui se conclui que $\eta(\theta)$ parte de 0, descreve uma curva no quadrante positivo, regressando à eficiência nula a partir de certo valor θ_0 .

A eficiência, tal como Loimaranta a definiu, depende de θ . No entanto, à semelhança do que virá a ser feito por *Lemaire* [1985] para o seu critério, poder-se-á definir como medida síntese para o conjunto da carteira

$$\eta = \int \eta(\theta) dU(\theta)$$

Esta medida apresenta no entanto o inconveniente de valores superiores a 1 poderem compensar valores inferiores, isto é um valor de η próximo de 1 poder resultar da média de duas zonas uma com valores demasiado baixos e outra de valores muito elevados. Assim sendo pareceria mais razoável considerar as diferenças, absolutas ou quadráticas, em relação à unidade. Nos casos práticos referidos na literatura tal limitação não é significativa já que as elasticidades superiores a 1 são muito raras.

2.1.2. O contributo de Lemaire

Lemaire [1985], retomando trabalhos anteriores, aborda esta problemática recorrendo a conceitos mais económicos, com a introdução duma taxa de desconto β a partir da qual se calcula o montante total actualizado a pagar em horizonte infinito por uma apólice que figure na classe j no presente período, $V_j(\theta)$, através de

$$V_j(\theta) = \pi(j) + \beta \sum_{l=1}^K P_{R,\theta}(j,l) V_l(\theta) \quad \text{para } j = 1, \dots, K \quad (5.5)$$

sendo $P_{R,\theta}(j,l)$ o elemento (j,l) da matriz $P_{R,\theta}$ das probabilidades de transição num passo da cadeia de Markov.

Recorrendo ao *princípio da contração* Lemaire mostra que este sistema tem solução única já que

Teorema 5.1 - Princípio da contração

Se, num espaço métrico completo M se especificar um operador A que satisfaça as duas condições seguintes:

1. O operador A transforma os pontos de M em pontos do mesmo espaço, isto é se $y \in M \implies A(y) \in M$
2. O operador A aproxima os pontos no espaço M , isto é $\rho(A[y], A[z]) \leq \alpha \rho(y, z)$ onde y e z são dois pontos quaisquer do espaço M , $\alpha < 1$ e $\rho(y, z)$ a distância entre y e z no espaço M .

então existe um único ponto fixo $\bar{y} \in M$ com $A[\bar{y}] = \bar{y}$ podendo este ser encontrado pelo método das aproximações sucessivas, isto é

$$\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

onde $y_n = A[\bar{y}_{n-1}]$ ($n = 1, 2, \dots$) e y_0 é escolhido arbitrariamente no espaço M .

A demonstração deste princípio pode ser vista em Elsgolts [1978] pp 53-55. ∇

No caso abordado por Lemaire, o vector $\underline{V}(\theta) \in R^K$ que é espaço completo. Definindo então

$$\|\underline{v}(\theta)\| = \max_j |V_j(\theta)|$$

ter-se-á um espaço métrico completo. Seja então o operador A tal que:

$$A[\underline{v}(\theta)] = \underline{z}(\theta)$$

onde

$$z_j(\theta) = \pi(j) + \beta \sum_{l=1}^K P_{R,\theta}(j,l) v_l(\theta)$$

Lemaire prova então a unicidade da solução do sistema (5.5), mostrando que

$$\|A\underline{w} - A\underline{v}\| \leq \alpha \|\underline{w} - \underline{v}\|$$

através de

$$\begin{aligned} \|A\underline{w} - A\underline{v}\| &= \max_j \left| \pi(j) + \beta \sum_{l=1}^K P_{R,\theta}(j,l) w_l(\theta) - \pi(j) - \beta \sum_{l=1}^K P_{R,\theta}(j,l) v_l(\theta) \right| \\ &= \max_j \left| \beta \sum_{l=1}^K P_{R,\theta}(j,l) (w_l(\theta) - v_l(\theta)) \right| \\ &\leq \beta \sum_{l=1}^K P_{R,\theta}(j,l) \max_l |(w_l(\theta) - v_l(\theta))| \end{aligned}$$

donde

$$\|A\underline{w} - A\underline{v}\| \leq \beta \|\underline{w} - \underline{v}\|$$

provando-se assim que A é uma contração e portanto que existe solução única para o sistema (5.5).

Provada a existência de solução única, aplica-se um raciocínio semelhante ao de Loimaranta, calculando-se a elasticidade do prémio total a pagar para cada classe isto é

$$\eta_j(\theta) = \frac{\frac{dv_j(\theta)}{v_j(\theta)}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \frac{dv_j(\theta)}{d\theta} \frac{\theta}{v_j(\theta)} \quad (5.6)$$

Como já foi dito, Lemaire generaliza o critério de eficiência para cada classe de partida instituindo

$$\eta_j = \int \eta_j(\theta) dU(\theta) \quad (5.7)$$

critério cujas limitações foram expostas quando da sua aplicação ao modelo de Loimaranta, e que mantêm plena validade já que este critério de optimalidade mais não é do que um aperfeiçoamento do anterior. Como classe de partida k Lemaire propõe, como facilmente se compreende, a classe que maximize η_j , já que neste caso não se trabalha com a distribuição estacionária mas sim com as distribuições em vigor nos diferentes passos.

2.2. O modelo de Norberg

A exposição deste modelo assenta essencialmente em dois artigos (Norberg [1976] e Borgan & al [1981]) e procura-se fundamentalmente responder ao problema de, dado um processo de risco e as regras de transição do sistema de bonus, definir o vector π dos prémios a pagar nas diferentes classes do sistema. Acessoriamente, e desde que se opte pela escolha do vector óptimo, também se poderá avaliar as regras transição se bem que o critério de eficiência não apresente interpretação económica facil. Trata-se, como se vê, de uma abordagem bem diferente da de Loimaranta e Lemaire regressando-se a uma visão bastante mais próxima da teoria da credibilidade.

Prossiga-se então a análise do processo de risco descrito na secção 3.3 do capítulo 3 e retomada na secção 1 do presente capítulo.

Seja então $Z_{R,n}$ uma variável aleatória que representa a classe do sistema onde uma apólice genérica se encontra no período n . Como se depreende da definição de sistema puro de bonus,

$$Z_{R,n} = \begin{cases} k & n = 1 \\ \mathbf{T}(Z_{R,n-1}, M_{n-1}) & n > 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

representando $\mathbf{T}(Z_{R,n-1}, M_{n-1})$ a classe para onde se transita pela aplicação das regras de transição \mathbf{T} , quando se está na classe $Z_{R,n-1}$ e se declaram M_{n-1} sinistros.

Defina-se ainda \mathbf{S} como sendo o trio (k, \mathbf{T}, π) , isto é, ao invés de \mathbf{R} , \mathbf{S} considera também os prémios a pagar nas diferentes classes do sistema.

Estabelece-se como objectivo do sistema minimizar a diferença quadrática média entre o prémio puro e o prémio estimado, situação que para o período n se pode descrever como a minimização de $Q_n(S)$ dado por

$$Q_n(S) = E\{[E(X_n|\theta) - \pi(Z_{R,n})]^2\}$$

Dado que a distribuição de $Z_{R,n}$ depende, para além dos elementos referenciados, do parâmetro θ ter-se-á

$$\begin{aligned} Q_n(S) &= \int [E(X_n|\theta) - \pi(Z_{R,n})]^2 dU(\theta) \\ &= \int \sum_{j=1}^K [E(X_n|\theta) - \pi(j)]^2 p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) \end{aligned}$$

onde

$$p_{R,\theta}^{(n)}(j) = \text{Prob}(Z_{R,n} = j|\theta)$$

e como, dado θ , o sistema forma uma cadeia de Markov homogénea com início no período 1 na classe k , então

$$\underline{p}_{R,\theta}^{(n)} = (\mathbf{P}_{R,\theta}^T)^{n-1} \underline{e}_k$$

sendo $\underline{p}_{R,\theta}^{(n)}$ o vector de elemento genérico $p_{R,\theta}^{(n)}(j)$

Do teorema 3.1 do capítulo 3, resulta como minimizante de $Q_n(S)$ o vector $\underline{\pi}_R^{(n)}$ de elemento genérico

$$\begin{aligned} \pi_R^{(n)}(j) &= E[E(X_n|\theta) | Z_{R,n} = j] \\ &= \int E(X_n|\theta) \frac{p_{R,\theta}^{(n)}(j)}{p_R^{(n)}(j)} dU(\theta) \\ &= \frac{1}{p_R^{(n)}(j)} \int E(X_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) \end{aligned} \tag{5.9}$$

com $p_R^{(n)}(j) = \text{Prob}[Z_{R,n} = j] = \int p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta)$

A dependência de $\pi_R^{(n)}$ em relação a n deriva não de X_n , já que se admite que, dado θ , $\{X_n\}$ forma uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas mas sim de $p_{R,\theta}^{(n)}$ que vai depender de n devido à existência da classe inicial k . Assim sendo, os resultados até agora obtidos não são directamente aplicáveis ao problema em estudo tendo surgido duas soluções:

1. (Norberg [1976]) Analisar a situação recorrendo a distribuição estacionária da cadeia com os inconvenientes derivados por um lado da velocidade de convergência da cadeia para a distribuição estacionária e por outro de nada se poder dizer sobre a classe de partida k . Norberg sugere então que se defina k recorrendo a um critério auxiliar, nomeadamente pela minimização de $Q_1(S)$.
2. (Borgan & al [1981]) Generalizar o caso anterior pela introdução de um sistema de ponderadores que podem abranger a distribuição estacionária, trabalhando-se então com uma combinação linear convexa das funções $Q_i(S)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) em que o índice 0 se refere à distribuição estacionária. Como esta solução generaliza a primeira apenas se vai trabalhar com este caso.

Defina-se então um conjunto de ponderadores $\{\omega_0, \omega_1, \dots\}$ formando uma combinação linear convexa (saliente-se que a primeira solução corresponde ao caso $\omega_0 = 1$ e $\omega_n = 0$ para $n \geq 1$). Neste quadro a função objectivo a minimizar será:

$$\begin{aligned} Q(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n Q_n(S) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K [E(X_n|\theta) - \pi(j)]^2 p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Tratando-se de minimizar uma perda quadrática, bastará anular o gradiente para encontrar o minimizante

$$\frac{\partial Q(S)}{\partial \pi(j)} = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int [E(X_n|\theta) - \pi^*(j)] p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) = 0$$

donde

$$\pi^*(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int E(X_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta)}{p_R(j)} \quad (5.11)$$

com

$$p_R(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n p_R^{(n)}(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) \quad (5.12)$$

O novo critério de eficiência das regras de transição, $e(R)$, será agora

$$e(R) = \sum_{j=1}^K [\pi_R^*(j)]^2 p_R(j) \quad (5.13)$$

tendo Borgan & al [1981] demonstrado o teorema seguinte que generaliza um resultado semelhante introduzido em Norberg [1976], e cuja demonstração será referida um pouco mais adiante, com base no resultado (5.17).

Teorema 5.2 (Borgan & al [1981]) *Sejam R e \tilde{R} dois conjuntos de regras de transição e sejam ainda S e \tilde{S} os sistemas de bonus respectivos com escalas óptimas de prémios π e $\tilde{\pi}$ respectivamente então $Q(S) < Q(\tilde{S}) \iff e(R) > e(\tilde{R}) \quad \forall$.*

A escolha da classe inicial

Como já se disse a classe inicial influencia $p_{R,\theta}^{(n)}(j)$ já que

$$p_{R,\theta}^{(n)} = \left(P_{R,\theta}^T \right)^{n-1} \underline{e}_k$$

Assim sendo a classe inicial k vai influenciar $Q(S)$ ou, o que é equivalente $e(R)$. Escolhe-se então k por forma a maximizar $e(R)$.

No caso em que $\omega_0 = 1$ e $\omega_n = 0$ para $n \neq 0$, k não terá qualquer influência em $Q(S) = Q_0(S)$. Norberg propõe então escolher k por forma a minimizar o risco no primeiro período, sendo o vector $\underline{\pi}$ determinado pelo método apresentado. Outra solução mais empírica poderia residir em escolher a classe k que permita uma aproximação mais rápida à distribuição estacionária para a qual se estabeleceu a escala óptima de prémios.

Algumas simplificações mais usuais

- Admitir a independência, dado θ , entre o número de participações e o custo de cada uma delas, bem como a independência entre θ e o custo de cada participação. Esta hipótese, não sendo nada pacífica já que a sua verificação empírica é muito discutível, apresenta no entanto a vantagem de tornar o sistema muito mais simples quer em termos de compreensão pelo público quer em termos de tratamento estatístico.

Neste quadro, tome-se o custo médio por participação como unidade monetária. Então

$$E(X_n|\theta) = E\left(\sum_{j=1}^{M_n} Y_{nj}|\theta\right) = E(M_n|\theta) E(Y) = E(M_n|\theta)$$

donde

$$\pi^*(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int E(M_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta)}{p_R(j)} \quad (5.14)$$

como se deduz de (5.13).

- No âmbito da simplificação anterior também se costuma admitir que a frequência das participações tem distribuição de Poisson com parâmetro θ . Assim sendo

$$E(M_n|\theta) = \theta$$

e

$$\pi^*(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int \theta p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta)}{p_R(j)} \quad (5.15)$$

Comentário ao modelo de Norberg Uma primeira observação a ser feita a este modelo, reside na interpretação a ser dada ao critério de óptimo $e(R)$. Como se depreende do teorema 5.2, este critério só pode ser utilizado na comparação de dois sistemas de bonus desde que ambos recorram às suas escalas óptimas. Por outro lado, ao invés do η de Loimaranta, o valor assumido por $e(R)$ não tem interpretação em si-mesmo.

Em segundo lugar nada garante que, sendo as classes definidas por ordem crescente de propensão à sinistralidade, isto é sendo a classe 1 a de menor propensão e K a de maior, a ordenação dos prémios óptimos a pagar seja sempre neste sentido. *Borgan & al* [1981] apresentam aliás um exemplo bem elucidativo deste ponto

onde para o sistema norueguês reduzido a 13 classes se obtém, para determinado sistema de ponderadores, o vector de prémios óptimos

$$\pi = \frac{1}{1000} [117 \ 155 \ 165 \ 177 \ 219 \ 240 \ 264 \ 285 \ 309 \ 336 \ 333 \ 359 \ 399]^T$$

verificando-se um decréscimo no prémio na passagem da classe 10 para a 11.

Outro ponto omissos consiste na comparação do mesmo sistema com dois vectores de prémios diferentes. Tal problemática vai ser retomada por *Gilde & Sundt*[1989] quando apresentam a sua versão linearizada do modelo de Norberg.

Por último *Borgan & al* [1981] apresentam uma interpretação interessante do sistema de ponderadores $\{\omega_0, \omega_1, \dots\}$, sugerindo que se defina uma variável aleatória discreta N que traduza a antiguidade de cada apólice na carteira, tomando-se então como valor de cada ponderador ω_j a frequência relativa das apólices com j anos ou seja a probabilidade de ao tirar uma apólice ao acaso da carteira, esta ter j anos de vigência. Neste quadro a expressão (5.10) será substituída por

$$Q(S) = E[Q_N(S)] \quad (5.16)$$

Saliente-se no entanto que tal procedimento exclui, em rigor, a distribuição estacionária já que passa a haver um limite superior para os valores de N com probabilidade positiva.

Tal interpretação não merece no entanto a nossa plena concordância já que obrigaria a uma re-optimização do sistema em cada ano para corresponder às alterações relativas entre os diferentes graus de antiguidade das apólices presentes na carteira. Parece mais adequado interpretar ω_n como um ponderador subjectivo (tendo obviamente em conta o aspecto anterior) a atribuir ao ano n no conjunto dos períodos representados na carteira.

2.3. Duas extensões ao modelo de Norberg

As duas extensões que se vão apresentar visam fundamentalmente dois objectivos; por um lado garantir, ao contrário do que acontece com a escala definida anteriormente um vector de prémios que seja não só crescente, isto é que qualquer penalização em termos de classes tenha sempre repercussões monetárias, mas onde

não existam também saltos muito bruscos na evolução dos montantes a pagar. Também se introduz, por outro lado, um novo critério de qualidade que pode ser aplicado a qualquer sistema de bonus, independentemente de este recorrer à escala óptima definida por Norberg e que se irá designar por escala Bayes.

Em ambos os casos ir-se-á minimizar $Q(S)$, tendo-se em conta que

$$Q(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n Q_n(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K [E(X_n|\theta) - \pi(j)]^2 p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta)$$

donde

$$Q(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K E^2(X_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K \pi(j)^2 p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K \pi(j) E(X_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta)$$

ora tendo em conta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K E^2(X_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K \pi(j)^2 p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) = \sum_{j=1}^K \pi(j)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) = \sum_{j=1}^K \pi(j)^2 p_R(j), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int \sum_{j=1}^K \pi(j) E(X_n|\theta) p_{R,\theta}^{(n)}(j) dU(\theta) = \sum_{j=1}^K \pi(j) \pi_B(j) p_R(j)$$

com $p_R(j)$ definido em (5.12) e com $\pi_B(j)$ correspondendo ao j -ésimo elemento da escala Bayes, cuja expressão foi dada em (5.11). Conclui-se então que

$$Q(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) + \sum_{j=1}^K \pi^2(j) p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K \pi(j) \pi_B(j) p_R(j) \quad (5.17)$$

Nesta expressão, o primeiro termo do segundo membro é independente da escala escolhida, sendo constante para uma carteira dada, enquanto a restante parte corresponde, quando se opta pela escala Bayes ⁶, ao oposto do critério de eficiência $e(R)$, ficando clara a generalização feita no teorema (5.3).

A dedução das escalas linear e geométrica é feita de forma muito simples partindo de (5.17) e procedendo à sua minimização com a restrição adequada a cada um destes casos.

⁶isto é $\pi(j) = \pi_B(j)$.

2.3.1. A escala linear

Este tipo de escala foi definido por *Gilde & Sundt* [1989], se bem que com uma dedução diferente da que será aqui feita. Ao postular $\pi(j) = a + b j$ ($j = 1, \dots, K$), virá

$$Q(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) + \sum_{j=1}^K (a + bj)^2 p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K (a + bj) \pi_B(j) p_R(j) \quad (5.18)$$

expressão que se vai minimizar em ordem a a e b . Para tal calcula-se

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(S)}{\partial a} = 2 \sum_{j=1}^K (a + bj) p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K \pi_B(j) p_R(j) \\ \frac{\partial Q(S)}{\partial b} = 2 \sum_{j=1}^K j (a + bj) p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K j \pi_B(j) p_R(j) \end{cases}$$

procedendo-se então à anulação do gradiente para obter o minimizante, o que, para a primeira expressão origina

$$a_L = \sum_{j=1}^K \pi_B(j) p_R(j) - b_L \sum_{j=1}^K j p_R(j) \quad (5.19)$$

e introduzindo (5.19) na segunda expressão vem

$$a_L \sum_{j=1}^K j p_R(j) + b_L \sum_{j=1}^K j^2 p_R(j) = \sum_{j=1}^K j \pi_B(j) p_R(j)$$

donde

$$b_L = \frac{\sum_{j=1}^K j \pi_B(j) p_R(j) - \sum_{j=1}^K j p_R(j) \sum_{j=1}^K \pi_B(j) p_R(j)}{\sum_{j=1}^K j^2 p_R(j) - \left[\sum_{j=1}^K j p_R(j) \right]^2} \quad (5.20)$$

Neste contexto define-se o *risco linear de credibilidade* para as regras R (RLC_R) como sendo o mínimo da função risco, isto é

$$RLC_R = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) + \sum_{j=1}^K (a_L + b_L j)^2 p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K (a_L + b_L j) \pi_B(j) p_R(j) \quad (5.21)$$

utilizando-se, como medida de eficiência relativa da escala linear face à escala de Bayes, a eficiência linear $\tilde{e}_L(R)$ definida através de

$$\tilde{e}_L(R) = \frac{RLC_R}{R_R} \quad (5.22)$$

onde R_R representa o risco quando se recorre à escala Bayes, isto é

$$R_R = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) - \sum_{j=1}^K \pi_B(j)^2 p_R(j) \quad (5.23)$$

2.3.2. A escala geométrica

Nesta alternativa, avançada em *Andrade e Silva* [1988], define-se o prémio na classe j através de $\pi(j) = a b^j$ ($j = 1, \dots, K$), procedendo-se então à minimização de (5.17) ou seja minimizar-se-á

$$Q(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) + \sum_{j=1}^K (a b^j)^2 p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K a b^j \pi_B(j) p_R(j) \quad (5.24)$$

Tal como no caso da escala linear calcula-se

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(S)}{\partial a} = 2a \sum_{j=1}^K b^{2j} p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K b^j \pi_B(j) p_R(j) \\ \frac{\partial Q(S)}{\partial b} = 2a^2 \sum_{j=1}^K j b^{2j-1} p_R(j) - 2a \sum_{j=1}^K j b^{j-1} \pi_B(j) p_R(j) \end{cases}$$

determinando-se o minimizante através de

$$a_G = \frac{\sum_{j=1}^K b_G^j \pi_B(j) p_R(j)}{\sum_{j=1}^K b_G^{2j} p_R(j)} \quad (5.25)$$

e de

$$a_G [a_G \sum_{j=1}^K j b_G^{2j-1} p_R(j) - \sum_{j=1}^K j b_G^{j-1} \pi_B(j) p_R(j)] = 0$$

expressão que se pode simplificar, tendo em conta os valores admissíveis para a_G e b_G bem como (5.25), obtendo-se

$$\sum_{j=1}^K b_G^j \pi_B(j) p_R(j) \sum_{j=1}^K j b_G^{2j} p_R(j) = \sum_{j=1}^K j b_G^j \pi_B(j) p_R(j) \sum_{j=1}^K b_G^{2j} p_R(j) \quad (5.26)$$

Dever-se-ia então provar a unicidade da solução em b_G da expressão (5.26), para $b_G > 1$, problema ainda em aberto. No entanto em todos os exemplos tratados a resolução numérica desta equação mostrou existir uma e uma só solução admissível em b_G . O ponto de estacionaridade que se obtiver será certamente um minimizante já que $\partial Q(S)/\partial b < 0$ em $b = 1$ e os valores admissíveis supõem $b_G > 1$. Para além das óbvias limitações que esta lacuna origina, é importante referir que, em termos práticos, as soluções admissíveis situam-se num intervalo relativamente estreito ⁷ o que torna possível um estudo cuidado deste intervalo por forma a verificar a unicidade da solução, em cada situação concreta.

Resolvido este problema transporta-se a solução encontrada para (5.25) obtendo-se os parâmetros da escala geométrica. As medidas de eficiência desta escala serão semelhantes às definidas no caso da escala linear obtendo-se

$$RGC_R = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) + \sum_{j=1}^K (a_G b_G^j)^2 p_R(j) - 2 \sum_{j=1}^K a_G b_G^j \pi_B(j) p_R(j) \quad (5.27)$$

e consequentemente,

$$\tilde{e}_G(R) = \frac{RGC_R}{R_R} \quad (5.28)$$

onde R_R é dado por (5.23).

2.3.3. Alguns comentários às novas escalas

As duas extensões que se apresentaram permitem obter escalas de prémios onde não se verifiquem as limitações descritas na secção 2.2.

A diferença principal entre as escalas linear e geométrica reside, como se depreende da definição destas, no facto de, no caso linear, as diferenças de prémios entre duas classes consecutivas serem constantes em termos absolutos enquanto no caso geométrico tal situação é verificada no quociente entre prémios, isto é sendo $j' > j$

$$\pi_L(j') - \pi_L(j) = b_L(j' - j)$$

⁷ b_G deve situar-se entre 1 (para adequar a evolução dos prémios aos riscos) e entre um valor que, embora dependente do número de classes do sistema e das regras de transição, terá certamente um máximo absoluto inferior a 3.

$$\pi_G(j') / \pi_G(j) = b_G^{j'-j}$$

A opção por uma destas escalas derivará portanto de uma escolha qualitativa do decisor⁸, isto é se se pretender por exemplo que a transição da classe 1 para a classe 3 tenha uma penalização idêntica em termos absolutos à transição da classe 7 para a classe 9, optar-se-á pela escala linear já que nesta opção a penalização será, em ambos os casos, dada por $2b_L$. Saliente-se que as penalizações relativas serão portanto menores quando se está em classes com maior propensão à sinistralidade já que com $j' > j$

$$\frac{\pi_L(j')}{\pi_L(j)} = 1 + \frac{b(j' - j)}{a + bj}$$

ou seja no exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi_L(3)}{\pi_L(1)} = 1 + \frac{2b}{a+b} \\ \text{e} \\ \frac{\pi_L(9)}{\pi_L(7)} = 1 + \frac{2b}{a+7b} \end{array} \right.$$

Ao invés se se pretender uma penalização relativa constante, então escolher-se-á a escala geométrica. Neste exemplo a variação nos prémios com uma penalização de duas classes será dada por b_G^2 , enquanto as penalizações absolutas serão crescentes, uma vez que, com $j' > j$,

$$\pi_G(j') - \pi_G(j) = \pi_G(j) (b^{j'-j} - 1)$$

ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_G(3) - \pi_G(1) = ab(b^2 - 1) \\ \text{e} \\ \pi_G(9) - \pi_G(7) = ab^7(b^2 - 1) = b^6 [\pi_G(3) - \pi_G(1)] \end{array} \right.$$

2.4. As limitações das metodologias propostas

No quadro da avaliação e estimação dos sistemas puros de bonus apresentaram-se diferentes abordagens, não existindo no entanto uma análise globalizadora que

⁸Refira-se ainda que, como se irá ver no capítulo 10, a forma funcional adoptada para o modelo desempenhará papel de relevo uma vez que cada um destes sistemas regulares parece virado para determinada forma funcional.

permita enquadrar os diversos contributos parciais.

De facto definiram-se duas formas de avaliar sistemas de bonus que se sintetizam no critério de Lemaire, onde se recorre à elasticidade dos prémios face aos riscos, e o critério Bayes que se baseia na comparação entre a perda quadrática originada por determinado sistema e aquela que seria inerente à situação óptima definida em termos da escala Bayes. Sublinhe-se que a formulação deste último critério, tal como foi construído em *Gilde & Sundt* [1989], permite avaliar qualquer sistema de bonus ao contrário do que acontecia com a formulação proposta por *Borgan & al* [1981].

Para além da problemática inerente à avaliação dos sistemas, estabeleceram-se também três critérios para determinar os prémios a cobrar nas diferentes classes de cada sistema. Se o processo óptimo em termos estatísticos pode conduzir a situações não admissíveis, não existe porém uma ideia muito clara sobre a qualidade (quer seja avaliada pelo critério Bayes ⁹ quer pelo de Lemaire) dos processos que parecem mais adequados a uma aplicação prática.

Para além destas limitações também é justo referir que subsistem ainda dois problemas significativos a que não se deu resposta:

- Como fixar K , número de classes do sistema?
- Como determinar, dado K , o melhor sistema de regras de transição?

Não tendo um modelo geral que permita responder de forma cabal a todas estas questões optou-se por ensaiar um conjunto de situações por forma a contribuir para a formulação de respostas a estas interrogações.

3. Ensaio efectuados

Este estudo, procurando contribuir para responder aos problemas levantados na secção 2.4, não deixa porém de apresentar as limitações inerentes a todos os estu-

⁹ *Gilde & Sundt* [1989] apenas apresentam alguns exemplos na sequência dos apresentados em *Borgan & al* [1981] enquanto *Andrade e Silva* [1988] apenas trata o caso português não existindo portanto um estudo com uma perspectiva mais abstrata que permita tirar conclusões genéricas.

dos deste tipo, isto é saber até que ponto as conclusões extraídas com base num número reduzido de casos podem ou não ser generalizáveis ao conjunto do universo. Procurou-se no entanto que as situações ensaiadas fossem de molde a cobrir os casos mais frequentes em termos práticos, tendo-se recorrido a diversos critérios na definição das diferentes experiências.

3.1. Definição dos testes

Processo de risco Não se tomaram em consideração os custos associados às diferentes participações (o que equivale em termos do prémio puro a admitir a independência entre custos e frequência de sinistralidade), tendo-se admitido um processo baseado na binomial negativa, isto é:

$$M_t \sim P(\Theta) \quad \text{e} \quad \Theta \sim \gamma(n, \alpha)$$

não se tendo considerado nenhuma heterogeneidade no tempo ¹⁰.

Em termos numéricos admitiram-se dois valores distintos para $E(M)$, 10 e 8%, valores aceitáveis para as participações em Responsabilidade Civil em Portugal. Recorde-se uma vez mais que não se considerou, nesta fase, a “sede de bonus”. Por outro lado fixou-se a variância da distribuição γ em 8.5% da média para manter uma certa adequabilidade à realidade e um grau de aleatoriedade semelhante.

Ponderadores Fixou-se o tempo máximo de permanência das apólices na carteira em 20 anos, admitindo-se uma estrutura com importâncias decrescentes ao longo do tempo, isto é

- 7.5% para o primeiro ano.

¹⁰Qualquer das metodologias de construção de escalas que foram apresentadas podem ser aplicadas a processos onde se defina um factor aprendizagem, isto é onde se defina um conjunto de constantes $\{c_1, \dots, c_t\}$ de tal forma que $M_t \sim P(c_t \Theta)$ (para mais pormenores veja-se *Gilde & Sundt* [1989] ou *Andrade e Silva* [1988]). No entanto a introdução deste factor não só traria um elemento de perturbação adicional como seria claramente mais desfavorável ao critério de Lemaire.

- 7.0% para os anos 2 e 3 decrescendo este valor 0.5% por grupos de 2 anos até atingir 3.0% para os anos 18 e 19.
- 2.5% para o último ano.

Dada a interpretação que se fez destes ponderadores, escolheram-se valores que não correspondem ao peso dos diferentes anos em nenhuma carteira, mas formando uma progressão onde os primeiros anos têm maior peso. Tal facto deve -se à procura de ponderadores com uma variação de sentido constante no tempo que não seja incompatível com a filosofia inerente à escolha de uma taxa de desconto inferior a 1. Nesta opção também se deu um peso acrescido aos primeiros anos o que permite visualizar melhor a escolha da classe inicial.

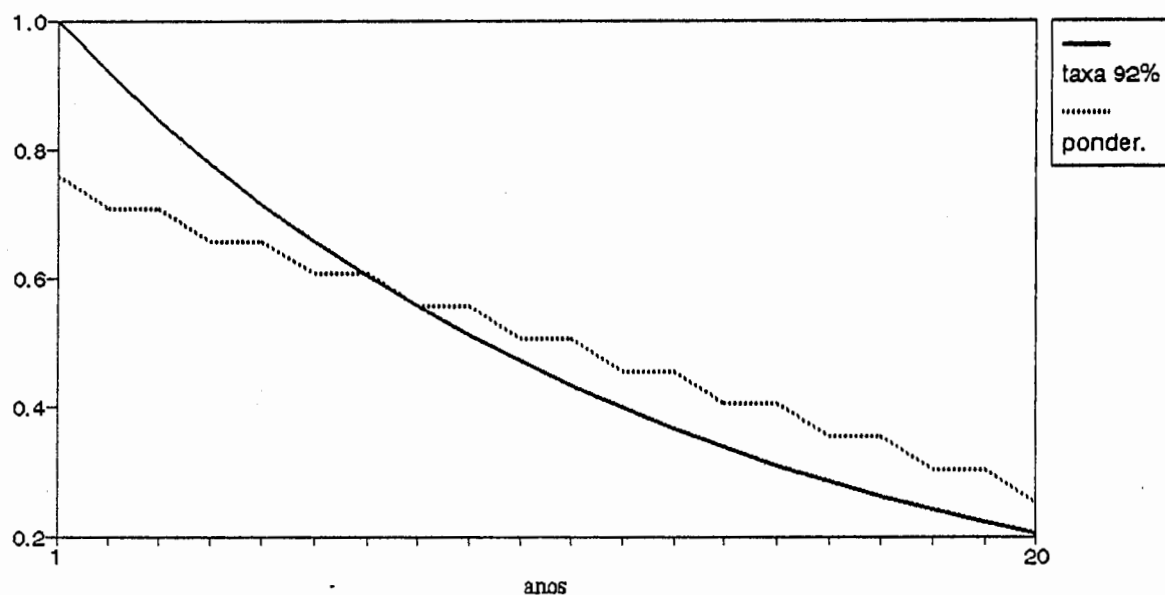
Taxa de desconto No caso do critério de eficiência de Lemaire escolheu-se uma taxa de desconto de 92% se bem que alguns ensaios feitos à margem do trabalho com outras taxas da mesma ordem de grandeza originassem resultados semelhantes. O comportamento desta taxas face aos ponderadores pode ser visto no gráfico 5.1.

Número de classes: Abordaram-se os sistemas com 2 a 20 classes, tendo-se escolhido este limite máximo por parecer que, a partir de determinado número de classes, a população nas piores classes é de tal forma diminuta que estas deixam de fazer sentido.

Regras de transição: Este ponto mereceu tratamento privilegiado face aos restantes, tendo-se formulado numa primeira fase 6 sistemas distintos de regras de transição para, num segundo tempo, introduzir dois sistemas adicionais, se bem que apenas com intuítos comparativos já que a sua admissibilidade em termos práticos levantava à partida grandes dúvidas, para não falar das poucas expectativas sobre a sua qualidade.

O primeiro conjunto de sistemas foi assim formado tendo por base as duas regras seguintes aplicadas ao sistema j :

Gráfico 5.1 - Comportamento da taxa de desconto face aos ponderadores



Quadro 5.1 - Número mínimo de classes por sistema de regras de transição

Sistema	Regras	Mínimo de classes
1	1-1	2
2	1-2	3
3	1-3	4
4	1-4	5
5	1-5	6
6	1-6	7
A	2-3	5
B	2-5	7

- Por cada ano sem participações a apólice desce uma classe.
- Por cada participação no decorrer do ano a apólice desce j classes se vigorar o sistema j (ou seja 1 classe no sistema 1, 2 no sistema 2 e 6 no sistema 6).

Recorde-se que qualquer transição só é feita no fim do ano e dentro dos limites do sistema de bonus (classes 1 e K respectivamente).

Os dois sistemas adicionais baseavam-se num sistema 2-3 (por cada ano limpo a apólice desce 2 classes, por cada participação sobe 3 no sistema A) e um sistema 2-5 (B). Como é óbvio os diferentes sistemas de regras só foram implementados quando o número de classes o permitia, situação que o quadro 5.1 sublinha.

Aspectos computacionais Definiram-se assim um conjunto de 258 ensaios que foram efectuados num software especialmente construído para o efeito por forma a otimizar o tempo de CPU gasto. Este programa permite analisar a eficiência dos sistemas bem como determinar as escalas óptimas e trata de forma simultânea as diferentes classes de partida.

No entanto o processo demorou cerca de 150 horas de CPU num MVax 3600 a 3.3 Mips. O tempo gasto cresce, como seria de esperar, de forma exponencial com a dimensão do problema, isto é com o número de classes.

3.2. Principais conclusões

Os resultados obtidos permitem por um lado afirmar um grande paralelismo nas avaliações de eficiência produzidas pelos dois critérios testados e sublinham por outro lado que a opção entre os três tipos de escalas irá permanecer, em boa parte, função de preferências externas ao campo da estatística, já que estes sistemas têm uma qualidade semelhante.

Na leitura dos resultados privilegiaram-se os ensaios com uma sinistralidade média de 10%, servindo os restantes como indicadores de comportamento.

Quadro 5.2 - Quadro global dos principais resultados

nº Cl.	Regras Trans.	Erro Quadrático Médio			k (base EQM)			Eficiência (%)			Amplitude	
		Bayes	Linear	Geom.	Bay.	Lin.	Geo.	Bayes	Linear	Geom.	Geo.	Lin.
2	1	79.41	79.41	79.41	1	1	1	6.07	6.07	6.07	1.92	1.91
3	1	75.79	75.79	75.98	1	1	1	9.43	9.43	9.02	2.89	2.75
3	2	75.77	76.32	76.69	1	1	1	9.78	9.23	8.68	2.10	2.13
4	1	73.84	73.84	74.35	1	1	1	10.91	10.91	9.91	3.94	3.53
4	2	72.25	72.74	72.96	1	1	1	12.88	12.45	11.99	2.80	2.68
4	3	73.41	74.18	74.62	1	1	2	12.16	11.39	10.62	2.25	2.24
5	1	72.85	72.85	73.77	1	1	1	11.52	11.50	10.31	5.06	4.25
5	2	69.88	70.28	70.56	1	1	2	14.81	14.44	13.81	3.22	3.05
5	3	70.24	70.81	71.03	1	2	2	14.88	14.35	13.96	2.77	2.68
5	4	71.87	72.41	72.97	1	2	2	13.72	13.05	12.21	2.36	2.37
5	A	73.47	75.41	75.62	1	1	1	11.66	10.01	9.66	2.52	2.45
6	1	72.38	72.40	73.61	1	1	2	11.75	11.69	10.08	5.77	4.95
6	2	68.12	68.25	68.64	1	2	2	16.00	15.91	15.00	3.71	3.47
6	3	68.04	68.27	68.56	2	2	2	16.63	16.44	15.80	3.18	3.00
6	4	69.04	69.50	69.79	2	2	2	16.10	15.71	15.20	2.70	2.69
6	5	70.71	71.19	71.77	2	2	3	14.76	14.30	13.37	2.49	2.42
6	A	72.51	73.53	73.79	1	1	2	12.63	11.65	11.19	2.93	2.79
7	1	72.17	72.21	73.69	1	1	2	11.84	11.71	9.60	6.91	5.63
7	2	66.88	66.92	67.61	2	2	2	16.72	16.74	15.58	4.20	3.82
7	3	66.29	66.48	66.95	2	2	3	17.92	17.82	16.95	3.30	3.23
7	4	66.86	67.31	67.52	2	2	2	17.81	17.52	16.97	2.99	2.94
7	5	68.12	68.73	68.91	2	2	3	17.03	16.55	16.04	2.84	2.69
7	6	69.87	70.21	70.75	2	3	3	15.62	15.17	14.29	2.44	2.55
7	A	71.07	72.33	72.77	1	2	2	13.70	12.62	11.83	3.14	3.01
7	B	70.16	73.04	73.42	1	2	2	14.67	12.35	11.79	2.57	2.49
8	1	72.08	72.14	73.97	1	1	2	11.86	11.67	9.26	8.17	6.31
8	2	66.02	66.05	66.84	2	2	3	17.18	17.19	15.91	4.51	4.15
8	3	64.79	65.00	65.24	2	2	3	18.93	18.84	18.05	3.80	3.48
8	4	65.35	65.67	65.79	2	3	3	18.96	18.75	18.22	3.38	3.19
8	5	66.22	66.74	66.85	2	3	3	18.53	18.12	17.78	3.00	2.96
8	6	67.58	68.05	68.30	2	3	3	17.63	17.11	16.69	2.83	2.76
8	A	70.00	71.04	71.58	1	2	2	14.46	13.62	12.65	3.58	3.31
8	B	70.24	71.26	71.59	3	2	2	14.97	13.90	13.33	2.83	2.73
9	1	72.04	72.13	74.33	1	1	2	11.87	11.62	8.98	9.22	6.99
9	2	65.51	65.54	66.40	2	2	3	17.40	17.38	15.94	4.91	4.47
9	3	63.65	63.91	64.20	3	3	3	19.54	19.43	18.60	4.02	3.73
9	4	64.06	64.29	64.56	3	3	3	19.79	19.72	18.99	3.51	3.36
9	5	64.79	65.17	65.27	3	3	3	19.53	19.36	18.94	3.28	3.14
9	6	65.88	66.38	66.48	3	3	3	18.96	18.60	18.30	3.06	2.93
9	A	69.35	70.17	70.80	1	2	2	14.92	14.22	13.10	4.02	3.58
9	B	68.30	70.01	70.39	2	2	2	16.31	14.92	14.25	3.06	2.91
10	1	72.03	72.14	74.70	1	1	2	11.87	11.58	8.65	10.60	7.68
10	2	65.12	65.23	66.25	3	2	3	17.52	17.43	15.95	5.16	4.77
10	3	62.82	63.04	63.47	3	3	4	19.99	19.93	19.01	4.11	3.93
10	4	62.84	63.10	63.26	3	3	4	20.62	20.57	19.91	3.80	3.53

Quadro 5.2 - Quadro global dos principais resultados
(cont.)

nº Cl.	Regras Trans.	Erro Quadrático Médio			k (base EQM)			Eficiência (%)			Amplitude	
		Bayes	Linear	Geom.	Bay.	Lin.	Geo.	Bayes	Linear	Geom.	Geo.	Lin.
10	5	63.68	64.02	64.08	3	3	4	20.35	20.26	19.75	3.52	3.27
10	6	64.51	65.05	65.07	3	3	3	19.93	19.69	19.38	3.25	3.08
10	A	68.70	69.42	70.30	1	2	2	15.33	14.69	13.33	4.11	3.82
10	B	67.90	68.77	69.23	3	2	3	16.79	15.91	15.08	3.25	3.08
11	1	72.02	72.15	75.06	1	1	2	11.87	11.54	8.32	12.76	8.38
11	2	64.87	65.07	66.23	3	2	4	17.57	17.40	15.80	5.23	5.07
11	3	62.17	62.40	62.79	4	3	4	20.29	20.25	19.22	4.41	4.13
11	4	61.93	62.25	62.33	4	3	4	21.13	21.11	20.38	4.05	3.68
11	5	62.73	63.08	63.09	4	4	4	20.96	20.91	20.37	3.39	3.48
11	6	63.54	63.98	63.90	4	4	4	20.63	20.46	20.19	3.39	3.31
11	A	68.19	68.88	69.87	1	2	3	15.60	15.00	13.52	4.41	4.06
11	B	66.72	67.91	68.45	2	2	3	17.52	16.55	15.61	3.39	3.19
12	1	72.01	72.16	75.38	1	1	2	11.87	11.51	8.06	13.86	9.08
12	2	64.71	64.99	66.22	3	2	4	17.60	17.34	15.73	5.62	5.37
12	3	61.66	61.98	62.45	4	3	4	20.46	20.41	19.39	4.65	4.32
12	4	61.20	61.58	61.71	4	4	4	21.53	21.45	20.76	3.84	3.90
12	5	61.75	62.12	62.15	4	4	5	21.59	21.48	21.04	3.84	3.61
12	6	62.67	63.08	63.07	4	4	4	21.19	21.07	20.72	3.48	3.40
12	A	67.88	68.45	69.55	1	2	3	15.87	15.21	13.64	4.65	4.30
12	B	65.79	66.97	67.40	2	2	4	18.20	17.23	16.34	3.48	3.35
13	1	72.01	72.18	75.67	1	1	2	11.87	11.49	7.91	16.01	9.79
13	2	64.62	64.96	66.34	3	2	4	17.61	17.26	15.57	5.94	5.68
13	3	61.31	61.69	62.14	4	3	5	20.60	20.47	19.43	4.82	4.50
13	4	60.64	60.97	61.12	4	4	5	21.79	21.70	20.96	4.33	4.04
13	5	61.04	61.39	61.36	4	4	5	22.04	21.98	21.47	3.90	3.73
13	6	61.99	62.37	62.26	4	4	5	21.66	21.61	21.24	3.50	3.48
13	A	67.60	68.15	69.41	1	2	3	15.99	15.33	13.58	4.82	4.52
13	B	65.21	66.20	66.59	4	3	4	18.49	17.75	16.81	3.90	3.51
14	1	72.01	72.18	75.88	1	1	3	11.87	11.48	7.76	14.75	10.49
14	2	64.56	64.95	66.47	3	2	5	17.61	17.18	15.45	6.15	5.98
14	3	61.05	61.49	61.95	4	3	5	20.67	20.48	19.44	4.90	4.68
14	4	60.13	60.50	60.65	5	4	5	21.99	21.93	21.19	4.36	4.17
14	5	60.45	60.83	60.79	5	4	5	22.34	22.32	21.76	3.88	3.83
14	6	61.20	61.69	61.50	5	4	5	22.14	22.09	21.72	3.88	3.58
14	A	67.34	67.92	69.27	3	2	4	16.13	15.40	13.54	5.49	4.75
14	B	64.60	65.55	66.00	4	3	4	18.94	18.16	17.15	3.88	3.65
15	1	72.01	72.19	76.05	1	1	3	11.87	11.47	7.62	18.14	11.21
15	2	64.52	64.96	66.58	3	2	5	17.62	17.11	15.32	7.08	6.29
15	3	60.88	61.30	61.85	4	4	6	20.71	20.46	19.45	4.89	4.86
15	4	59.75	60.15	60.33	5	4	6	22.12	22.07	21.27	4.31	4.31
15	5	59.95	60.38	60.34	5	4	6	22.56	22.55	21.98	4.31	3.92
15	6	60.60	61.07	60.90	5	5	6	22.48	22.44	22.10	3.80	3.80
15	A	67.17	67.76	69.19	3	2	4	16.19	15.43	13.48	5.53	4.96
15	B	64.03	64.98	65.51	4	4	4	19.15	18.45	17.39	4.31	3.80

Quadro 5.2 - Quadro global dos principais resultados
(cont.)

nº Cl.	Regras Trans.	Erro Quadrático Médio			k (base EQM)			Eficiência (%)			Amplitude	
		Bayes	Linear	Geom.	Bay.	Lin.	Geo.	Bayes	Linear	Geom.	Geo.	Lin.
16	1	72.01	72.20	76.20	1	1	3	11.87	11.46	7.48	19.74	11.94
16	2	64.49	64.95	66.74	3	3	5	17.62	17.07	15.20	7.14	6.37
16	3	60.75	61.15	61.73	4	4	6	20.74	20.43	19.41	5.47	5.03
16	4	59.46	59.89	60.05	5	4	6	22.22	22.14	21.36	4.78	4.43
16	5	59.54	59.95	59.92	5	5	6	22.74	22.71	22.14	4.18	4.16
16	6	60.12	60.56	60.41	5	5	6	22.75	22.69	22.32	4.18	3.89
16	A	67.03	67.66	69.22	3	2	4	16.25	15.43	13.34	6.25	5.18
16	B	63.67	64.49	65.10	4	4	5	19.49	18.72	17.59	4.18	3.92
17	1	72.01	72.20	76.34	1	1	3	11.87	11.46	7.35	24.09	12.65
17	2	64.47	64.94	66.88	3	3	6	17.62	17.02	15.11	7.07	6.68
17	3	60.65	61.04	61.73	4	4	6	20.75	20.41	19.38	5.31	5.22
17	4	59.23	59.68	59.88	5	4	7	22.29	22.18	21.41	4.59	4.55
17	5	59.17	59.57	59.58	6	5	6	22.88	22.82	22.26	4.59	4.25
17	6	59.71	60.14	60.02	6	5	6	22.95	22.92	22.52	3.97	3.95
17	A	66.93	67.58	69.29	3	2	4	16.27	15.41	13.26	6.13	5.40
17	B	63.13	64.08	64.73	6	4	5	19.68	18.94	17.75	4.59	4.05
18	1	72.01	72.20	76.46	1	1	3	11.87	11.45	7.24	25.55	13.38
18	2	64.46	64.95	67.00	3	3	6	17.62	16.98	14.99	7.99	6.98
18	3	60.58	60.96	61.67	4	4	7	20.76	20.38	19.37	5.90	5.41
18	4	59.05	59.47	59.68	5	5	7	22.34	22.18	21.42	5.05	4.75
18	5	58.86	59.27	59.29	6	5	7	22.98	22.95	22.36	4.33	4.35
18	6	59.33	59.79	59.68	6	5	7	23.11	23.10	22.64	4.33	4.04
18	A	66.85	67.54	69.39	3	2	4	16.30	15.38	13.12	6.87	5.61
18	B	62.88	63.75	64.41	6	4	6	19.88	19.10	17.87	4.33	4.18
19	1	72.01	72.20	76.57	1	1	3	11.87	11.45	7.16	30.91	14.11
19	2	64.45	64.96	67.15	3	3	6	17.62	16.94	14.92	7.69	7.30
19	3	60.51	60.91	61.69	5	4	7	20.77	20.35	19.35	5.56	5.60
19	4	58.89	59.29	59.58	6	5	7	22.37	22.17	21.43	4.72	4.89
19	5	58.62	59.02	59.07	6	5	7	23.07	23.04	22.41	4.72	4.43
19	6	59.00	59.49	59.36	6	5	7	23.24	23.24	22.77	4.00	4.11
19	A	66.80	67.51	69.50	3	2	5	16.31	15.34	13.00	6.54	5.83
19	B	62.52	63.49	64.18	6	4	6	19.97	19.20	17.93	4.72	4.30
20	1	72.01	72.21	76.66	1	1	3	11.87	11.45	7.11	31.95	14.82
20	2	64.44	64.97	67.26	3	3	7	17.62	16.91	14.85	8.61	7.62
20	3	60.45	60.88	61.68	5	4	8	20.77	20.30	19.33	6.12	5.79
20	4	58.75	59.15	59.46	6	5	8	22.39	22.16	21.45	5.14	5.03
20	5	58.41	58.82	58.89	6	5	8	23.14	23.09	22.44	5.14	4.52
20	6	58.72	59.17	59.09	6	6	7	23.35	23.35	22.84	4.32	4.34
20	A	66.76	67.50	69.61	3	2	5	16.31	15.30	12.88	7.26	6.05
20	B	62.30	63.28	64.01	6	4	6	20.14	19.27	17.98	5.14	4.43

Também se optou por sintetizar as conclusões em sete pontos essenciais já que se torna difícil abarcar de forma genérica a globalidade dos resultados produzidos. Na impossibilidade de publicar os resultados obtidos na sua totalidade, seleccionaram-se os elementos mais significativos por cada aspecto parcial que serão referidos nos diferentes pontos específicos. Em termos gerais apenas se apresenta o quadro 5.2 onde figura uma síntese da globalidade dos resultados obtidos com base na taxa média de 10%, sendo a classe inicial k determinada com base no erro quadrático médio, remetendo-se a definição da amplitude das escalas para a expressão (5.29) que será discutida posteriormente.

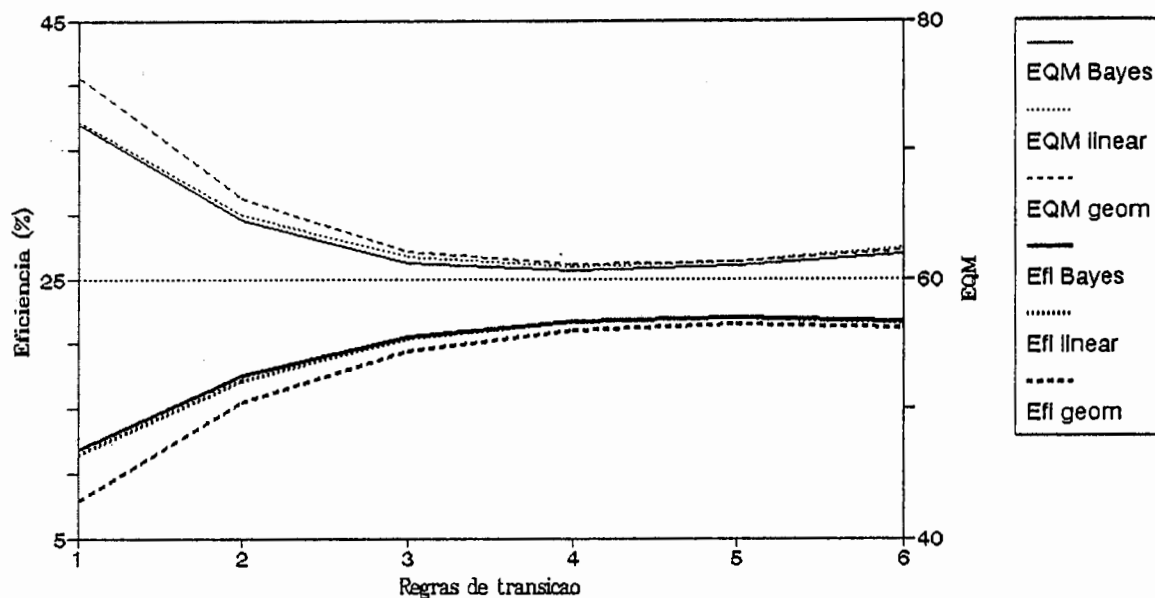
CrITÉRIOS de avaliação A primeira conclusão sugerida pelos resultados aponta para um comportamento semelhante dos dois critérios de avaliação da qualidade das escalas obtidas pese embora uma maior apetência por parte do critério de Lemaire para optar, uma vez fixado o número de classes, por sistemas de regras de transição mais penalizantes.

Esta semelhança é particularmente evidente no que respeita à classe inicial, onde existe uma concordância quase perfeita entre critérios, ou na qualidade relativa das diferentes escalas.

No que diz respeito à escolha das regras de transição, dado o número de classes do sistema, existem maiores flutuações, não em termos de comportamento genérico dos critérios, uma vez que ambos tendem a seleccionar os mesmos casos, mas sim em termos do ponto óptimo, costumando o critério de Lemaire apontar para o sistema imediatamente superior ao critério Bayes (apenas no quadro dos seis sistemas principais).

No gráfico 5.2 ilustra-se este comportamento no caso em que existem 13 classes, representando-se a eficiência e o erro quadrático médio óptimos obtidos para os diferentes sistemas de regras de transição (em cada caso optou-se pela melhor classe inicial, dadas as regras de transição e o número de classes). Tenha-se também presente que a avaliação pelo EQM pretende apurar um mínimo enquanto na eficiência à Lemaire procura-se um máximo. Neste âmbito, a concordância entre critérios é avaliada pela simetria existente entre cada uma das duas curvas

Gráfico 5.2 - Comportamento dos critérios de avaliação



referentes às mesmas escalas.

Refira-se também que se obtêm, nalguns casos, eficiências médias superiores a 20% o que se pode considerar bastante bom quando comparado com estudos similares (*Lemaire* [1985] e [1987]).

Como acontece noutros estudos, também se verificou que $\eta_j(\theta)$ atinge um máximo para valores de θ muito superiores ao valor médio (sempre superiores ao dobro).

Comportamento das escalas Enquanto a escala linear apresenta um comportamento muito próximo da escala Bayes, a escala geométrica é algo mais irregular, tendendo a estar próxima da escala Bayes quando a situação é interessante e distanciando-se desta quando a situação se degrada, penalizando assim os casos menos relevantes.

Tal comportamento pode ilustrar-se tomando como exemplo o gráfico 5.3 onde se representa a evolução do Erro Quadrático Médio em função do número de classes

do sistema supondo-se que vigora o sistema 2 de regras de transição e tomando para cada caso a classe inicial que minimiza este erro.

Como se pode ver a curva de evolução correspondente à escala geométrica permite uma caracterização mais acentuada da qualidade do sistema em função do número de classes.

Na análise pelo critério de Lemaire - gráfico 5.4 - assiste-se a um fenómeno comparável, se bem que a escala linear acuse uma evolução semelhante à da escala geométrica, pese embora um amortecimento mais acentuado.

Refira-se ainda que os ensaios supondo uma taxa média de 8% não alteram em nada estas conclusões.

Regras de Transição e Número de Classes Neste quadro a primeira conclusão que se tira reside na forte ligação existente entre estas duas componentes. De facto, a qualidade dos diferentes sistemas de regras de transição dependerá, sobretudo em termos relativos, do número de classes que se tenham fixado, com excepção, como seria de esperar, dos dois últimos sistemas de regras de transição 2-3 e 2-5 que originam escalas de qualidade bastante inferior à dos demais.

Em termos genéricos a evolução do comportamento dos sistemas de regras de transição pode caracterizar-se por uma melhoria de qualidade destes sistemas com o aumento do número de classes do sistema até se atingir um ponto a partir do qual não existe nenhuma evolução positiva, podendo mesmo verificar-se um decréscimo de qualidade ¹¹, que se mostra particularmente acentuado no caso da escala geométrica.

Dentro desta ideia central, as divergências de comportamento existentes devem-se essencialmente à natureza das escalas e ao critério de avaliação utilizado.

Enquanto as escalas Bayes e linear apresentam uma evolução semelhante, sem grandes perdas de qualidade mesmo para um número de classes manifestamente

¹¹com excepção, claro está, da escala Bayes quando avaliada pelo EQM, já que este não poderá crescer quando aumenta o número de classes dada a definição destas escalas.

Gráfico 5.3 - EQM em função de K - Regras de transição nº2

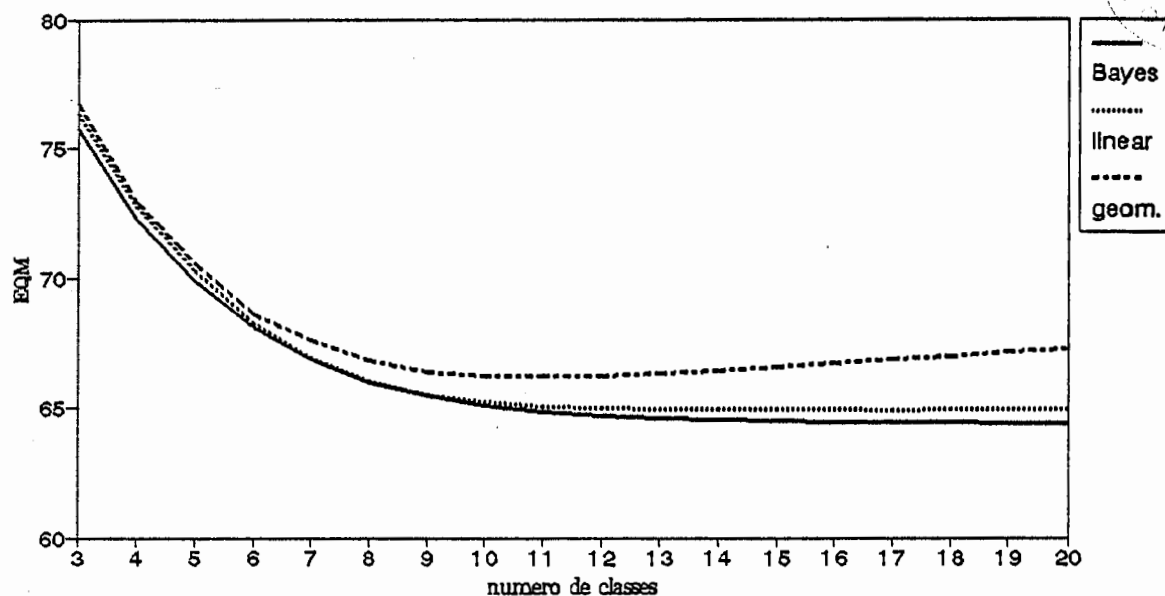
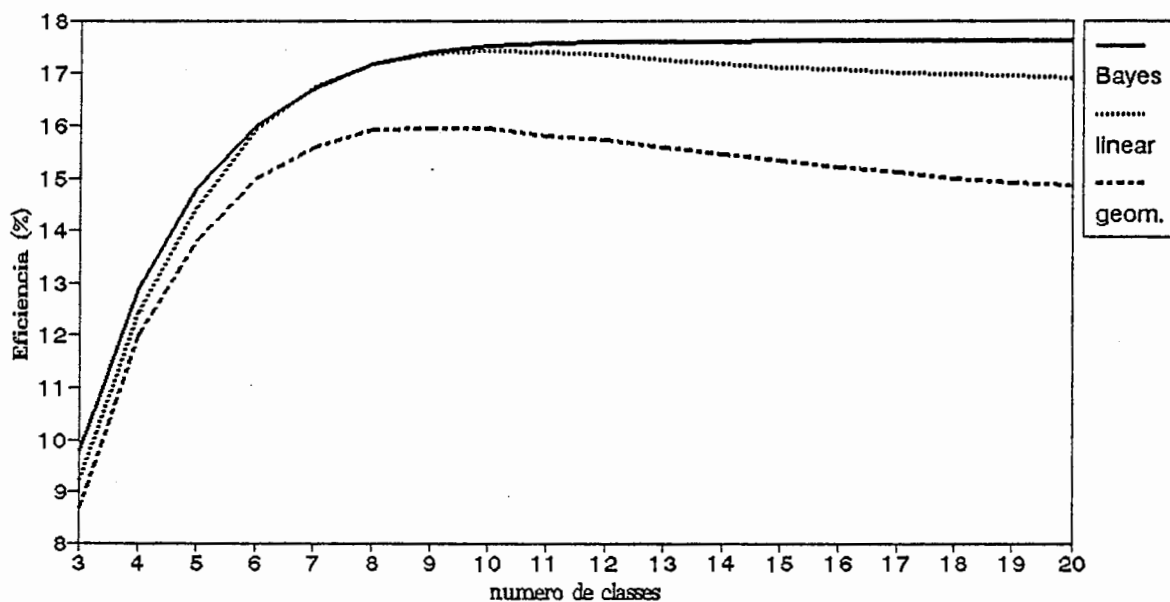


Gráfico 5.4 - Eficiência em função de K - Regras de transição nº2



exagerado face às regras de transição em estudo, já a escala geométrica é bastante mais sensível a este fenómeno.

No gráfico 5.3 pode visualizar-se este comportamento, assinalando-se que à situação de ausência de sistema de bonus corresponde um EQM de 85 (os valores indicados estão multiplicados por 10^4), e que, embora não seja muito visível no gráfico por se tratar de uma variação mínima, o EQM sobe no caso da escala linear na passagem das 19 para as 20 classes ¹².

A qualidade das regras de transição face ao número de classes também pode ser avaliada pela amplitude da escala, $A(S)$, definida, no caso das escalas regulares (linear e geométrica), através de

$$A(S) = \frac{\pi(K)}{\pi(1)} \quad (5.29)$$

já que a escala Bayes não origina obrigatoriamente prémios sempre crescentes ¹³.

Ao utilizar este critério torna-se claro que, quando o número de classes se torna excessivo face às regras de transição, a amplitude atinge valores inadmissíveis como se pode ver no quadro 5.3 onde se admitiu que vigora o sistema 1 de regras de transição. Mais uma vez a escala geométrica acusa uma sensibilidade bastante maior do que a escala linear.

Número óptimo de classes Com os elementos já referenciados, parece claro que existem situações que se rejeitam liminarmente, procurando-se agora definir possíveis critérios de determinação dos casos mais interessantes.

Recorreu-se assim à variação relativa da perda quadrática esperada, Δ_c , definida por

$$\Delta_c = (Q_{c-1} - Q_c) / Q_c \quad (5.30)$$

¹²Veja-se o quadro 5.2

¹³Este conceito poderia ser generalizado para abranger a escala Bayes recorrendo por exemplo a

$$A'(S) = \frac{\max_{j=1,\dots,K} \pi(j)}{\min_{j=1,\dots,K} \pi(j)}$$

opção que não se seguiu por tornar muito incerta a interpretação a dar à amplitude quando não existe variação regular.

Quadro 5.3 - Evolução da amplitude das escalas

Sistema 1 de regras de transição

Classes	freq. média 10%		freq. média 8%	
	Linear	Geométrica	Linear	Geométrica
2	1.9	1.9	2.5	2.5
4	3.5	3.9	5.2	6.2
6	5.0	5.8	7.7	10.5
8	6.3	8.2	10.1	14.8
10	7.7	10.6	12.6	20.7
12	9.1	13.9	15.1	27.1
15	11.2	18.1	18.8	43.8
20	14.8	32.0	25.1	93.8

em que o índice representa o número de classe do sistema, considerando-se fixas as regras de transição e optando-se, em cada caso, pelo melhor k à luz do critério seleccionado.

Com base nesta variação relativa, começou-se por determinar um intervalo para o número de classes interessantes em cada situação. Para tal estabeleceu-se que, se Δ_c fosse superior a 1%, c era considerada aceite enquanto se rejeitavam as classes que induziam uma variação relativa não superior a 0.5%. Este processo não levanta grandes problemas de aplicação prática uma vez que Δ_c é decrescente com c (verificam-se apenas algumas excepções sem significado), servindo assim o valor de 1% para fixar o número mínimo de classes e o de 0.5% o máximo.

Construiu-se assim o quadro 5.4 onde, para além destes valores extremos (número mínimo e máximo de classes a reter), se indica, para o limite superior do intervalo, a perda quadrática esperada neste ponto, bem como dois critérios adicionais para avaliar a qualidade relativa deste valor.

O primeiro critério corresponde ao quociente entre as perdas quadráticas quando se opta pelo número de classes indicado face ao mínimo que se consegue obter no intervalo de classes estudado (2 a 20), procurando-se assim traduzir a

Quadro 5.4 - Número de Classes por Regras de Transição

Número mínimo e máximo de classes

	1	2	3	4	5	6
Bayes	6-6	9-10	12-13	13-15	14-18	15-19
Linear	6-6	9-9	12-12	14-15	14-18	16-20
Geométrica	5-5	9-9	12-12	13-15	14-17	15-19

Perda Quadrática Esperada (Max nº Classes)

	1	2	3	4	5	6
Bayes	72.38	65.12	61.31	59.75	58.86	59.00
Linear	72.40	65.54	61.98	60.15	59.27	59.17
Geométrica	73.77	66.40	62.45	60.33	59.58	59.36

Critério de qualidade nº 1 (%)

	1	2	3	4	5	6
Bayes	99.5	99.0	98.6	98.3	99.2	99.5
Linear	99.7	99.1	98.2	98.3	99.2	100.0
Geométrica	99.8	99.7	98.8	98.6	98.8	99.5

Critério de qualidade nº 2 (%)

	1	2	3	4	5	6
Linear	100.0	99.4	98.9	99.3	99.3	99.7
Geométrica	98.1	98.1	98.2	99.0	98.8	99.4

Quadro 5.5 - Variação Relativa da Perda Quadrática (em %)

com a variação das regras de transição

	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
Bayes	11.15	6.21	2.61	1.51	-0.23
Linear	10.47	5.74	3.04	1.48	0.17
Geometric	11.10	6.33	3.51	1.26	0.37

perda de qualidade associada ao facto de se limitar o número de classes.

O segundo critério avalia a relação, expressa em percentagem, entre a perda quadrática esperada que se obtém com a escala Bayes e aquela originada pelas escalas regulares, avaliando-se agora a perda associada à obtenção de regularidade na escala.

Os valores obtidos mostram que as diferenças são mínimas quer quando se opta por limitar o número de classes ¹⁴ (perdas sempre inferiores a 2%) quer quando se opta por qualquer dos sistemas regulares não existindo, a este nível, limitações significativas que desaconselhem a utilização das escalas lineares ou geométricas.

Regras de transição óptimas A selecção dos sistemas de regras de transição também pode ser feita recorrendo a um critério semelhante àquele que se utilizou na selecção do número de classes, isto é à variação relativa da função perda quadrática esperada.

No quadro 5.5 apresenta-se a variação relativa da perda esperada, tendo-se considerado o número máximo de classes definido no quadro 5.4 para cada sistema de regras de transição.

Com base nestes resultados, dever-se-á seleccionar o sistema 4 ou o 5. Tendo em conta o princípio da parcimónia e o número de classes que a opção vai induzir

¹⁴É necessário ter em conta que os rácios são calculados considerando-se apenas um número de classes não superior a 20 o que sobre avalia o índice de qualidade para os sistemas de regras mais pesados, nomeadamente os sistemas 5 e 6.

Quadro 5.6 - Selecção da classe k

Escala	freq. média 10%				freq. média 8%			
	Moda	Mediana	Média	Desv. pad.	Moda	Mediana	Média	Desv. pad.
Norberg	1	3	2.99	1.66	1	1	1.96	1.31
Linear	2	3	2.87	1.56	1	1	1.74	1.16
Geometric	3	4	3.97	1.81	2	3	3.43	1.69

(ver quadro 5.4), parece mais aconselhável reter o sistema 4, já que origina uma qualidade semelhante com um menor número de classes.

A classe inicial A opção por uma classe inicial k encontra-se facilitada na medida onde, para cada caso, se assiste a um comportamento característico dos critérios de qualidade em função da escolha de k , comportamento esse que se pode exemplificar, no caso de um sistema com 15 classes e com o sistema 4 de regras de transição, nos gráficos 5.5 (visão pelo EQM) e 5.6 (abordagem pela eficiência).

Refira-se no entanto que um tal comportamento só é característico das regras de transição do tipo 1 classe de bonificação, j classes de agravamento por sinistro, já que os sistemas 3-2 e 5-2 originam comportamentos oscilantes na escolha de k .

Assinale-se também que as escalas Bayes e linear induzem a escolha de uma classe de partida k baixa enquanto o recurso à escala geométrica conduz a optar por classes de valor mais elevado. O quadro 5.6 sintetiza o comportamento da escolha baseada no erro quadrático médio para todas as situações ensaiadas.

As escalas de prémios No gráfico 5.7 traça-se o prémio a pagar em cada uma das classes do sistema calculado com as diferentes escalas tendo-se escolhido $k = 5$ para as escalas Bayes e Linear e $k = 6$ para a escala geométrica, admitindo-se 15 classes e as regras de transição 4.

A evolução é particularmente clara sendo de sublinhar o comportamento da

Gráfico 5.5 - EQM em função de k - 15 classes - Regras nº4

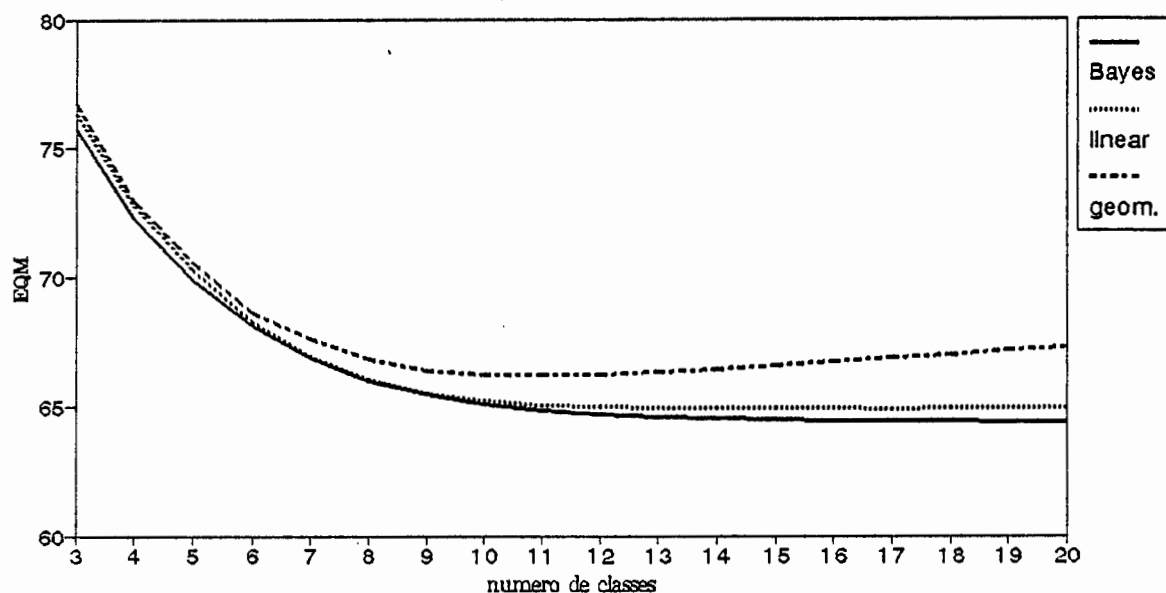


Gráfico 5.6 - Eficiência em função de k - 15 classes - Regras nº4

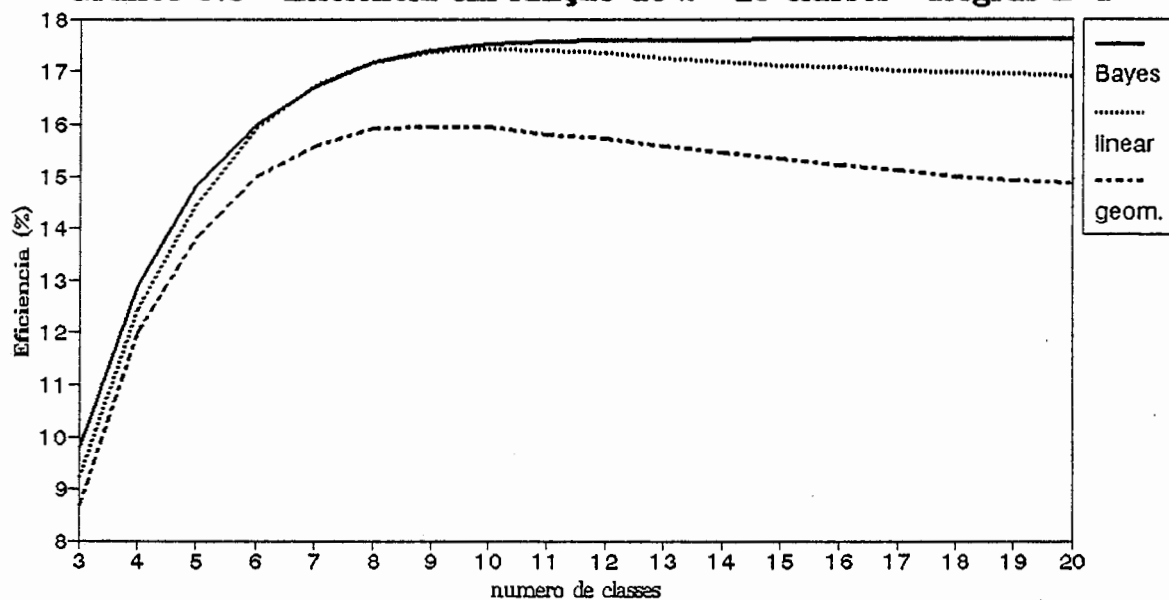
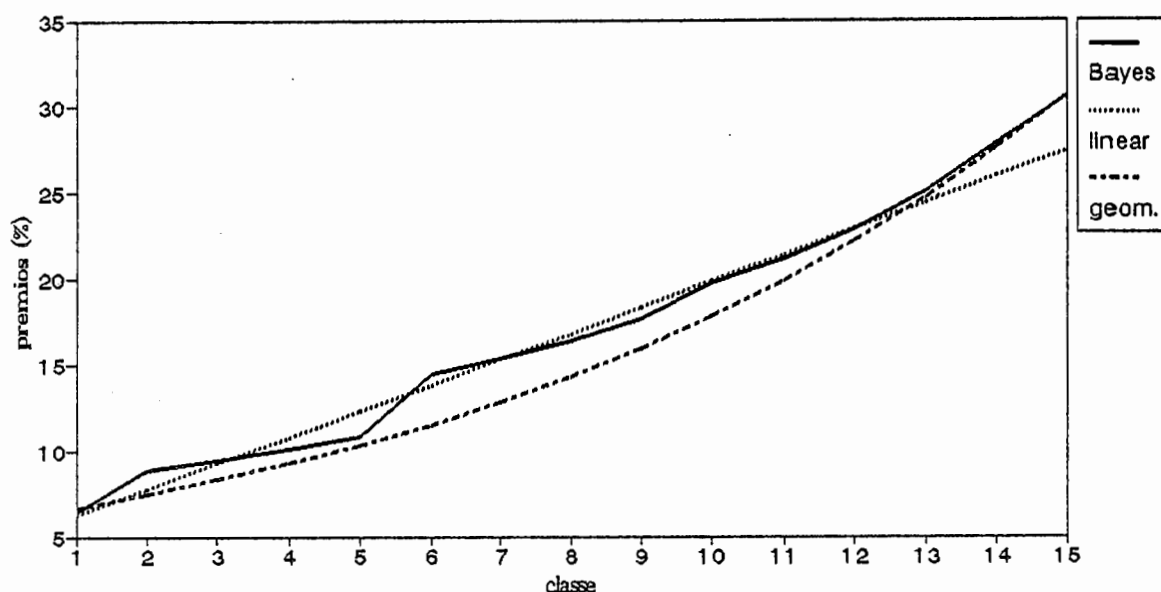


Gráfico 5.7 - Prémio em % do custo médio de uma indemnização



escala Bayes que, embora apresentando um crescimento algo irregular, não regista, neste caso, nenhum decréscimo. Por outro lado também se vê claramente que a escala linear induz um comportamento amortecido nas últimas classes, facto que não é muito penalizado pelos critérios por ser escassa a população que se encontra nestas classes.

4. A “sede” de bonus

Ao introduzir um sistema de bonus onde as regras de transição estejam baseadas no número de participações feitas à seguradora e não nos custos que estas originam, estar-se-á inevitavelmente a fomentar a “sede” de bonus, isto é a tendência para os segurados não declararem os pequenos sinistros por forma a evitar agravamentos futuros nos prémios a pagar.

Este fenómeno, não sendo necessariamente negativo para as seguradoras, já que estas transferem para a responsabilidade dos segurados um número apreciável

de sinistros onde muitas vezes os custos administrativos iam ser muito significativos face ao montante das indemnizações, necessita no entanto de ser tratado com alguma cautela.

De facto, as companhias ao tomarem apenas conhecimento dos sinistros acima de determinado montante estarão a sub-avaliar a frequência de sinistralidade na carteira para além de poderem ser conduzidas a apreciações muito enviesadas sobre a propensão à sinistralidade dos diversos segurados. Este problema assume maiores proporções nos meios urbanos onde são mais frequentes os pequenos sinistros que não serão tidos em consideração pela seguradora (uma vez que não originam nenhuma participação) na caracterização do risco associado às diferentes apólices, sendo no entanto aceite que um segurado que se envolva frequentemente neste tipo de acidentes terá uma propensão acrescida para se envolver num de maiores proporções. Tenha-se também presente que existem autores (*Lemaire* [1985] por exemplo) que referem que os segurados tendem, por razões no domínio da psicologia social, a recorrer a limites de retenção bastante superiores àqueles que seriam determinados por um comportamento óptimo. Não existem no entanto nenhuns estudos sérios que quantifiquem ou mesmo provem tal hipótese.

Refira-se ainda que para além deste fenómeno, existem ainda mecanismos complementares como a instituição de franquias que tendem a reforçar a componente de auto-seguro no sistema, se bem que noutros segmentos do seguro automóvel.

Nesta secção estudar-se-á o cenário proposto por *Lemaire* [1985], sugerindo-se no entanto soluções alternativas às propostas deste autor, já que estas não parecem aceitáveis em termos matemáticos. Apresentam-se por fim alguns exemplos que ilustram a metodologia proposta.

4.1. O cenário Lemaire

O problema estabelecido em *Lemaire* [1985] pode definir-se como a procura dos limites de retenção óptimos em cada classe do sistema de bonus, entendendo-se por limite de retenção o montante a partir do qual se declaram os sinistros.

Dado um sistema de bonus $S = (k, T, \pi)$ com K classes, pretende-se assim determinar os valores x_j ($j = 1, \dots, K$) referentes ao montante a partir dos qual um segurado participa a ocorrência à seguradora, valores esses que vigorarão sem alterações durante todo o período. Assinale-se também que, nesta secção, o índice j representará sempre a classe do sistema de bonus em que a apólice se encontra.

Admite-se que o segurado, quando regista um sinistro avalia perfeitamente os custos que lhe estão associados e procede à sua declaração no caso destes serem superiores ao limite de retenção que vigora na classe do sistema de bonus em que se encontra.

O objectivo residirá então, na óptica de Lemaire, em fixar os limites de retenção, x_j ($j = 1, 2, \dots, K$), por forma a minimizar o valor esperado actualizado a pagar em horizonte infinito, isto é procurar-se-ão os x_j por forma a minimizar o montante total actualizado dos pagamentos a serem feitos à seguradora supondo um horizonte infinito (montante esse que se representará por V_j), conceito que generaliza aquele que se introduziu na secção 2.1.2 quando se apresentou o critério de eficiência de Lemaire.

4.1.1. A formulação do cenário

Seja então M a variável aleatória que representa o número de sinistros que ocorrem a um segurado genérico, admitindo-se uma distribuição de Poisson para esta variável. Assim

$$M \sim \text{Po}(\theta)$$

O custo de um sinistro, S , variável aleatória não negativa, terá distribuição $f(s)$, e definindo p_j como a probabilidade de não participar um sinistro, ou seja

$$p_j = \int_0^{x_j} f(s) ds,$$

chega-se sem grande dificuldade à distribuição dos custos de um sinistro não participado, S' , que será

$$f^*(s') = \frac{1}{p_j} f(s') \quad 0 < s' < x_j$$

donde

$$E(S'_j) = p_j^{-1} \int_0^{x_j} s f(s) ds. \quad (5.31)$$

Seja ainda R_j a variável aleatória que representa o número de sinistros declarados num período, com distribuição $g_j(r)$ dada por

$$g_j(r) = \sum_{i=r}^{\infty} \text{Prob}(M=i) \binom{i}{r} (1-p_j)^r p_j^{i-r}$$

ou seja, introduzindo a hipótese feita sobre a distribuição de M ,

$$\begin{aligned} g_j(r) &= \frac{\theta^r e^{-\theta}}{r!} (1-p_j)^r \sum_{i=r}^{\infty} \frac{\theta^{i-r} p_j^{i-r}}{(i-r)!} \\ &= \frac{\theta^r e^{-\theta}}{r!} (1-p_j)^r e^{\theta p_j} \\ &= \frac{\lambda_j^r e^{-\lambda_j}}{r!} \quad \text{com } \lambda_j = \theta(1-p_j) \end{aligned}$$

isto é

$$R_j \sim \text{Po}(\lambda_j) \quad j = 1, \dots, K \quad (5.32)$$

Supondo a independência entre o custo dos sinistros não participados e a frequência destes, dado x_j , obtem-se então para o custo médio em sinistros não participados no período,

$$E(C_j) = E(M - R_j) E(S'_j) = \theta p_j E(S'_j) \quad (5.33)$$

Também se admite, para simplificar, que os pagamentos por sinistros não declarados são efectuados no meio do período, donde, tomando β como taxa de desconto, se deduz

$$V_j = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(C_j) + \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) V_{T_j(r)} \quad j = 1, \dots, K \quad (5.34)$$

em que $T_j(r)$ representa a classe para onde se transita quando se declaram r sinistros no período. As semelhanças entre esta expressão e (5.5) tornam-se particularmente claras se se escrever (5.34) sobre a forma,

$$V_j = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(C_j) + \beta \sum_{i=1}^K P_{j,i}(x_j) V_i \quad j = 1, \dots, K \quad (5.35)$$

representando $P_{j,i}(x_j)$ a probabilidade de transitar num passo da classe j para a classe i quando vigora x_j como limite de retenção, isto é

$$P_{j,i}(x_j) = \sum_{r \in I_i} g_j(r) \quad \text{com } I_i : \{r : T_j(r) = i\}$$

o que permite escrever em termos matriciais

$$\underline{V}(\underline{x}) = \underline{b}(\underline{x}) + \beta \mathbf{P}(\underline{x}) \underline{V}(\underline{x}) \quad (5.36)$$

em que $\underline{b}(\underline{x})$ é um vector de elemento genérico

$$b_j(x_j) = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(C_j)$$

enquanto a matriz $\mathbf{P}(\underline{x})$ terá por elemento genérico $P_{j,i}(x_j)$, sabendo-se que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^K P_{j,i}(\underline{x}) = 1 & \forall \underline{x} \in \mathfrak{R}_+^K \\ P_{j,i}(\underline{x}) \geq 0 & \forall \underline{x} \in \mathfrak{R}_+^K \\ & j, i = 1, \dots, K \end{cases}$$

Sublinhe-se ainda que quer o elemento j do vector \underline{b} , quer a linha j da matriz \mathbf{P} apenas dependem do elemento x_j .

Neste quadro pode-se então escrever

$$\underline{V}(\underline{x}) = [\mathbf{I} - \beta \mathbf{P}(\underline{x})]^{-1} \underline{b}(\underline{x}) \quad (5.37)$$

Tendo presente que $\mathbf{P}(\underline{x})$ corresponde à matriz das probabilidades de transição num passo na cadeia de Markov, prova-se a unicidade da solução do sistema.

Lemaire [1985] tira então partido da semelhança entre (5.5) e (5.35) para, utilizando novamente o princípio da contracção, demonstrar a unicidade do sistema definido em (5.35).

4.1.2. A solução proposta por Lemaire

Lemaire, após ter definido o cenário, propõe uma solução que, não parecendo correcta, não se quiz deixar de apresentar. Suponha-se que um segurado, que já

efectuou m participações no corrente período sofre, no momento t ($0 < t < 1$), um sinistro de custo x . Abrem-se-lhe então duas alternativas, participar ou não o sinistro.

No caso de optar por participar, o seu custo esperado actualizado será

$$V_j^{(a)} = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(C_j^*) + \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j^{(1-t)}(r) V_{T_{r+m+1}}(j)$$

com $E(C_j^*)$ traduzindo os custos esperados em sinistros não participados no período e o indicador $(1-t)$ na função $g_j(\cdot)$ referindo que o processo de geração dos sinistros deve ser aplicado não ao intervalo $[0, 1]$ mas sim a $(t, 1]$ o que no quadro das hipótese que se estabeleceram é feito substituindo o parâmetro λ_j da Poisson por $\lambda_j (1-t)$.

A outra alternativa origina como custo esperado

$$V_j^{(b)} = x + \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(C_j^*) + \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j^{(1-t)}(r) V_{T_{r+m}}(j)$$

respeitando-se a notação definida anteriormente.

Lemaire determina então o limite óptimo de retenção, x_j , como o valor de x que torna indiferente a escolha entre as duas alternativas, isto é

$$x_j = \beta^{1-t} \sum_{r=0}^{\infty} g_j^{(1-t)}(r) (V_{T_{r+m+1}}(j) - V_{T_{r+m}}(j)) \quad j = 1, \dots, K \quad (5.38)$$

Este sistema de K equações a K incógnitas terá, segundo Lemaire, solução única.

Esta proposta não parece no entanto correcta por duas ordens de razões:

- Não faz sentido postular um limite de retenção independente de t e de m quando se estabelece o cenário para fixar os limites de retenção como funções destas variáveis. No caso de se querer equacionar o problema em função destas variáveis será necessário reformular todo o cenário, substituindo desde logo todos os elementos que são função de x_j por outros em função de x_{jtm} .
- Para além disto, o processo de fixação dos limites de retenção como ponto de indiferença entre as opções possíveis não parece válido em casos como estes.

De facto, Lemaire está a definir uma situação do tipo

$$D_j = \begin{cases} X + Z_1 & X \leq x_j \\ Z_2 & X > x_j \end{cases}$$

que pretende minimizar em termos de valor esperado. Ora,

$$\begin{aligned} E(D_j) &= \int_0^{x_j} [x + z_1] f(x) dx + \int_{x_j}^{\infty} z_2 f(x) dx \\ &= \int_0^{x_j} x f(x) dx + z_1 \int_0^{x_j} f(x) dx + z_2 \int_{x_j}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_0^{x_j} x f(x) dx + z_1 F(x_j) + z_2 [1 - F(x_j)] \\ &= \int_0^{x_j} x f(x) dx + (z_1 - z_2) F(x_j) + z_2 \end{aligned}$$

donde

$$\frac{dE(D_j)}{dx_j} = x_j f(x_j) + \frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x_j} F(x_j) + (z_1 - z_2) f(x_j) + \frac{\partial z_2}{\partial x_j}$$

A anulação da derivada apenas conduz à solução proposta por Lemaire no caso de z_1 e z_2 não serem função de x_j , já que, neste caso, o ponto de estacionaridade seria dado por

$$x_j = z_2 - z_1$$

Mas, no caso em estudo, é óbvio que quer z_1 quer z_2 dependem dos limites de retenção o que torna o raciocínio de Lemaire incorrecto.

4.1.3. A obtenção dos limites de retenção

A solução que se propõe no presente trabalho consiste na maximização de uma combinação linear convexa arbitrária das diferentes funções V_j , isto é considera-se um conjunto de ponderadores $\{d_1, \dots, d_K\}$ por forma a constituírem uma combinação linear convexa e minimiza-se

$$V = \sum_{j=1}^K d_j V_j \quad (5.39)$$

Para tal segue-se o processo habitual, procedendo à anulação do gradiente.

Ora,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^K d_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, K$$

com

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \begin{cases} \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) \frac{\partial V_{T_j(r)}}{\partial x_i} & i \neq j \\ \beta^{\frac{1}{2}} \frac{dE(C_j)}{dx_j} + \beta \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{dg_j(r)}{dx_j} V_{T_j(r)} + g_j(r) \frac{\partial V_{T_j(r)}}{\partial x_j} \right] & i = j \end{cases} \quad (5.40)$$

De (5.34) e (5.40) deduz-se que,

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, K \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, K$$

podendo-se assim substituir o problema inicial de minimização de V em ordem aos x_j por um conjunto de K problemas,

$$\min_{x_j} V_j \quad j = 1, \dots, K \quad (5.41)$$

Determina-se então o ponto de estacionaridade de V_j , observando-se que

- $\frac{dp_j}{dx_j} = \frac{d}{dx_j} \left[\int_0^{x_j} f(s) ds \right] = f(x_j)$
- $\frac{dE(C_j)}{dx_j} = \frac{d}{dx_j} \left[\theta \int_0^{x_j} s f(s) ds \right] = \theta x_j f(x_j)$
- $\frac{\partial g_j(r)}{\partial x_j} = \begin{cases} \theta f(x_j) g_j(r) & r = 0 \\ \theta f(x_j) g_j(r) - \theta f(x_j) g_j(r-1) & r = 1, 2, \dots \end{cases}$

Com base nestes resultados intermédios deduz-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 &\Leftrightarrow \theta x_j f(x_j) + \beta^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \theta f(x_j) g_j(r) V_{T_j(r)} - \sum_{r=1}^{\infty} \theta f(x_j) g_j(r-1) V_{T_j(r)} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x_j + \beta^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) V_{T_j(r)} - \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) V_{T_j(r+1)} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x_j = \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) [V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}] \end{aligned} \quad (5.42)$$

Em termos computacionais, o ponto de estacionaridade será a solução de

$$x_j = \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{r_j^*} g_j(r) [V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}] \quad j = 1, \dots, K \quad (5.43)$$

onde r_j^* representa o máximo número de participações sem que se transite para a classe K , já que, para $r > r_j^*$, $T_j(r+1) = T_j(r) = K$.

Condições de segunda ordem Estas condições podem ser estabelecidas pelo estudo da matriz Hesseana no ponto de estacionaridade. Para tal, calcule-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i^2} &= \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) \frac{\partial^2 V_{T_j(r)}}{\partial x_i^2} \\ \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j^2} &= \beta^{\frac{1}{2}} \theta f'(x_j) \left\{ x_j - \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) [V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}] \right\} + \\ &\quad + \beta^{\frac{1}{2}} \theta f(x_j) \left\{ 1 - \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{dg_j(r)}{dx_j} (V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g_j(r) \left(\frac{\partial V_{T_j(r+1)}}{\partial x_j} - \frac{\partial V_{T_j(r)}}{\partial x_j} \right) \right] \right\} \\ &= \beta^{\frac{1}{2}} \theta f'(x_j) \left\{ x_j - \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) [V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}] \right\} + \\ &\quad + \beta^{\frac{1}{2}} \theta f(x_j) \left\{ 1 - \beta^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \theta f(x_j) g_j(r) (V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{r=1}^{\infty} \theta f(x_j) g_j(r-1) (V_{T_j(r+1)} - V_{T_j(r)}) + \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) \left(\frac{\partial V_{T_j(r+1)}}{\partial x_j} - \frac{\partial V_{T_j(r)}}{\partial x_j} \right) \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j \partial x_i} &= \beta^{\frac{1}{2}} \theta f(x_j) \left\{ -\beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) \left[\frac{\partial V_{T_j(r+1)}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{T_j(r)}}{\partial x_i} \right] \right\} \\ &= -\beta \theta f(x_j) \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) \left[\frac{\partial V_{T_j(r+1)}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{T_j(r)}}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

Expressões que, no ponto de estacionaridade x_j^* ($j = 1, \dots, K$) anteriormente definido se irão escrever,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_j(x^*)}{\partial x_j^2} &= \beta^{\frac{1}{2}} \theta f(x_j) \left\{ 1 + \beta^{\frac{1}{2}} \theta f(x_j) \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) [V_{T_j(r+2)} - 2 V_{T_j(r+1)} + V_{T_j(r)}] \right\} \\ \frac{\partial^2 V_j(x^*)}{\partial x_j \partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial^2 V_j(x^*)}{\partial x_i^2} &= \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) \frac{\partial^2 V_{T_j(r)}(x^*)}{\partial x_i^2}\end{aligned}$$

ou seja, uma condição suficiente para que a Hesseana seja definida positiva no ponto de estacionaridade será dada por

$$\sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) [V_{T_j(r+2)} - 2 V_{T_j(r+1)} + V_{T_j(r)}] > 0 \quad (5.44)$$

Um possível algoritmo Para resolver numericamente o conjunto de K problemas definidos em (5.41), propõe-se um algoritmo baseado num processo iterativo para resolver (5.43). Uma vez obtida esta solução, procede à verificação de (5.44).

Tal algoritmo pode ser sintetizado em 6 passos:

1. Estabelecer um ponto de partida para a pesquisa iterativa, em geral $\underline{x} = \underline{0}$.
2. Calcular a matriz $\mathbf{P}(\underline{x})$ e o vector $\underline{b}(\underline{x})$ de elementos genéricos dados respectivamente por:

$$\mathbf{P}_{j,i}(x_j) = \sum_{r \in I_i} g_j(r) \quad I_i : \{r : T_j(r) = i\}$$

$$b_j(x_j) = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} \theta \int_0^{x_j} s f(s) ds$$

3. Calcular então $\underline{V}(\underline{x})$ recorrendo a (5.37).
4. Obter um novo ponto \underline{x} recorrendo a (5.43).
5. Testar a variação no ponto \underline{x} em relação à iteração anterior. Caso esta seja significativa regressar à etapa 2, caso contrário passar à fase seguinte.

6. Verificar a desigualdade (5.44).

Sublinhe-se que o critério de paragem poderia também ter sido fixado em termos das variações no vector \underline{V} , caso em que a reformulação do algoritmo é trivial uma vez que se trata apenas de uma reordenação das diferentes etapas.

Refira-se ainda que, em qualquer dos casos, se pode analisar a soma das variações em valor absoluto ou apenas a maior variação absoluta.

Por último, caso se tenha tomado como ponto de partida a situação de não retenção $\underline{x} = \underline{0}$, poder-se-á deduzir os ganhos do segurado originados pelo recurso a uma política de retenção.

Alguns comentários

- Para além da comparação com a situação que decorre de não se efectuarem retenções, é evidente que também se pode estudar a situação em qualquer ponto. Entre estes, um destaque particular vai naturalmente para as situações próximas do auto-seguro, isto é para as quais existe um vector \underline{x} com elementos de valor muito elevado face aos custos associados aos sinistros.

No caso de se querer analisar a situação quando existe um auto-seguro total, isto é quando os limites de retenção forem infinitos, ter-se-á de reformular (5.36) o que origina

$$V_j = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(S) + \beta V_{T_j(0)} \quad j = 1, \dots, K.$$

- É necessário por outro lado não esquecer que as soluções dependem de θ . Quando se procede ao estudo dos limites óptimos dentro de determinada carteira costuma-se trabalhar com o valor médio na carteira, mas numa abordagem individualizada será necessário recorrer a uma estimativa do valor de θ que se deverá obter por um método externo a este raciocínio.
- Saliente-se por último que quando se utiliza o algoritmo de Lemaire no instante $t = 0$ (e consequentemente $m = 0$), a expressão (5.38) virá

$$x_j = \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_j(r) (V_{T_{r+1}}(j) - V_{T_r}(j)) \quad j = 1, \dots, K$$

o que, tendo em conta que β assume valores próximos de 1, permite perceber a razão pela qual as conclusões que Lemaire tira com o seu algoritmo são aceitáveis.

4.2. Alguns exemplos

Para ilustrar a importância da sede de bonus apresentam-se alguns exemplos que permitem avaliar a amplitude e as consequências deste fenómeno em função, por um lado do sistema de bonus em vigor, e por outro da distribuição estatística associada ao custo dos sinistros, procurando-se também tirar partido das diferentes escalas óptimas definidas nas secções anteriores.

Neste quadro optou-se por estudar, numa primeira fase, um sistema com 5 classes por constituir um referencial relativamente simples, passando-se posteriormente para um sistema com 15 classes, bastante mais realista em termos de aplicabilidade prática. Tal estudo foi desenvolvido num software especialmente construído para o efeito, tendo-se realizado os diferentes ensaios num Mvax 3600 onde se verificou uma convergência extremamente rápida (em geral após a quarta iteração).

4.2.1. Os sistemas com 5 classes

Considere-se então um sistema de bonus com 5 classes, definindo-se os casos que foram objecto de análise da seguinte forma:

- Sistemas 1 e 2 de regras de transição.
- Escalas óptimas definidas anteriormente, (Bayes, Linear e Geométrica) escolhendo-se em cada caso a melhor classe inicial k .
- Custo médio de cada sinistro fixado em 1 unidade monetária, admitindo-se, para o desvio-padrão, três valores distintos (3, 4 e 5). A razão da escolha destes valores, à falta de dados concretos fiáveis sobre a situação em Portugal, baseou-se nos coeficientes de dispersão obtidos em estudos similares, nomeadamente Lemaire [1985] e van der Laan & Hop [1989].

Quadro 5.7 - Sede de bonus

	Regras 1			Regras 2		
	Bayes	Linear	Geom.	Bayes	Linear	Geom.
min p_j (%)	26.2	25.9	19.3	44.2	37.1	32.6
max p_j (%)	63.0	63.2	67.6	71.3	56.9	56.8
p_j médio (%)	28.7	27.7	21.3	46.6	39.1	35.1
freq. obser. (%)	7.1	7.2	7.9	5.3	6.1	6.5
Retenção média (x100)	9.4	9.3	6.7	22.4	15.7	13.3
V_j médio (x100) com ret.	96.9	96.9	97.8	107.0	96.0	93.7
V_j médio (x100) sem ret.	97.7	99.1	99.1	117.9	101.5	95.2

- Admitiu-se uma distribuição lognormal para o custo médio dos sinistros, com base em *van der Laan & Hop* [1989] já que *Lemaire* [1985] recorre a uma distribuição empírica, e que não existe informação suficiente para a construção de uma distribuição empírica para a situação portuguesa.
- Apenas se analisaram os elementos referentes a uma taxa de sinistralidade de 10%.

Para cada uma destas combinações procuraram-se os níveis óptimos de retenção, deduzindo-se a partir daí os elementos mais significativos em cada classe do sistema. Como indicadores globais referentes a cada sistema analisado, construíram-se as médias ponderadas destas variáveis tendo-se utilizado como ponderadores a distribuição estacionária da cadeia com os níveis de retenção óptimos ou a distribuição que resulta dos diferentes ω_n que se utilizaram (vejam-se as secções anteriores).

Como os dois sistemas de ponderadores originam resultados semelhantes (as distribuições a que conduzem são do mesmo tipo), apenas se apresentam os resultados referentes ao sistema baseado na distribuição estacionária da cadeia de Markov. No quadro 5.7 representam-se os elementos mais significativos para o caso da distribuição lognormal com desvio padrão igual a 4.

Quadro 5.8 - Custo médio por sinistro (Regras 1)

Cl.	Linear				Geométrica			
	Pond	p_j	Auto-seguro	Participado	Pond	p_j	Auto-seguro	Participado
1	0.924	0.259	0.039	1.349	0.917	0.193	0.026	1.239
2	0.069	0.477	0.009	1.896	0.075	0.418	0.007	1.706
3	0.006	0.580	0.012	2.353	0.007	0.572	0.012	2.309
4	*	0.632	0.014	2.679	0.001	0.676	0.016	3.036
5	*	0.488	0.009	1.936	*	0.572	0.011	2.258
	—	0.277	0.036	1.394		0.213	0.024	1.284

* valores inferiores a $5 \cdot 10^{-4}$.

Como é natural a passagem do sistema 1 de regras de transição para o sistema 2, mais severo, induz o estabelecimentos de limites de retenção mais altos com as consequências facilmente previsíveis na probabilidade de não declarar um sinistro quando este ocorre.

Por outro lado, é importante sublinhar que a a sede de bonus induz enviesamentos significativos na avaliação da frequência de sinistralidade e dos custos associados à mesma. De facto a sinistralidade observada pela seguradora é bastante inferior à sinistralidade real registando-se um desvio contrário na avaliação dos custos destes. No caso das regras 1 por exemplo, a escala linear induz uma diminuição de cerca 28% na frequência observada de sinistros e um custo médio de 1.39 unidades monetárias por sinistro participado à seguradora em vez do valor base de 1 unidade monetária.

Sublinhe-se ainda que a escala geométrica origina uma maior transparência do mercado, pelo menos em termos de comportamento óptimo, levando quer a uma maior dispersão pelas diferentes classes, quer a níveis médios de retenção mais baixos. No exemplo anterior, a diminuição na frequência seria de 21% com um custo esperado para os sinistros participados de 1.28 unidades monetárias. O quadro 5.8 ilustra o desenvolvimento das situações exemplificadas.

Quadro 5.9 - Sede de bonus

	Regras 3			Regras 4		
	Bayes	Linear	Geom.	Bayes	Linear	Geom.
min p_j (%)	34.2	34.3	23.6	34.0	28.5	31.4
max p_j (%)	68.7	67.2	70.7	68.6	66.1	69.8
p_j médio (%)	37.7	38.5	27.8	42.4	44.3	36.4
freq. obser. (%)	6.2	6.1	7.2	5.8	5.6	6.4
Retenção média (x100)	15.2	15.6	9.7	28.7	20.1	14.7
V_j médio (x100) com ret.	81.5	81.2	77.1	78.4	77.3	77.7
V_j médio (x100) sem ret.	90.2	89.9	81.7	92.6	92.2	88.2

Tenham-se também presentes os ganhos que se conseguem obter no valor actualizado dos pagamentos (V_j) sobretudo quando as regras de transição se mostram mais severas.

Os quadros que se poderiam construir com base nos outros coeficientes de variação são semelhantes a estes registando-se apenas uma diminuição dos limites de retenção com o aumento da dispersão mas com uma probabilidade maior de não declarar um sinistro.

4.2.2. A passagem para 15 classes

Como se pode ver no quadro 5.9 a situação não se altera significativamente com a passagem para um sistema com 15 classes. Assinale-se no entanto que, no caso das escalas Bayes e Linear, o decréscimo dos V_j com o agravamento das regras de transição se deve ao facto de se estar em presença de vectores de prémios π diferentes. Parece assim que se podem generalizar as conclusões tiradas no primeiro exemplo, tendo-se presente que o objectivo não é minimizar os limites de retenção mas mantê-los dentro de limites aceitáveis.

5. Algumas generalizações

Os sistemas puros de bonus, tal como foram apresentados, podem ser generalizados em várias direcções para permitir uma mais fácil adaptação a diferentes situações. No entanto estas adaptações são, na maior parte dos casos, desenvolvidas de forma independente para cada situação o que não permite que se apresente um enquadramento geral.

Num primeiro ponto aborda-se uma situação muito frequente em termos dos sistemas em vigor em diversos países com particular realce para o caso português.

Seguidamente discute-se, embora de forma bastante menos profunda, outras direcções para as quais se poderia desenvolver o processo, com maior ênfase para os sistemas de penalizações variáveis.

5.1. Os sistemas de duração variável

Existem muitos sistemas de bonus implementados onde as transições entre certas categorias ¹⁵ só se efectuam após uma permanência de vários anos em determinadas condições.

Como exemplos deste tipo de sistemas podem citar-se o tão estudado sistema belga ou, noutro plano, o sistema de descontos e agravamentos em vigor em Portugal.

5.1.1. Formalização do modelo e dedução dos estimadores

A formalização destes modelos assenta no desdobramento das categorias onde se tem de permanecer x anos em outras tantas classes do sistema de bonus, impondo-se porém que o prémio em vigor nas x classes seja idêntico. Vê-se assim que o conceito de categoria pode ser definido como um conjunto de classes a que

¹⁵O conceito de categoria será definido aquando da formalização do modelo na sub-secção seguinte. Por ora tenha-se presente que, em termos dos sistema que se definiu, uma categoria corresponde a um conjunto de classes onde vigora um prémio idêntico.

corresponde o mesmo prémio. Quando se reformulam os sistemas nos termos da definição expressa na secção 1 do presente capítulo, o indicador da existência de categorias será a presença de restrições adicionais que imponham prémios iguais em certas classes. Exemplos deste tipo de tratamento podem ser vistos nalguns textos, embora não tratem os problemas inerentes à estimação de escalas óptimas.

Considere-se então o sistema de bonus, devidamente desdobrado, com K classes. Seja ainda $\{G_1, G_2, \dots, G_U\}$ uma partição destas classes por forma a que dentro de cada sub-grupo o prémio seja idêntico para todas as classes.

Neste contexto a expressão (5.17) pode ser reescrita como,

$$Q(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int E^2(X_n|\theta) dU(\theta) + \sum_{u=1}^U \pi^{*2}(u) p_R^*(u) - 2 \sum_{u=1}^U \pi^*(u) \pi_B^*(u) p_R^*(u) \quad (5.45)$$

com

$$\begin{cases} p_R^*(u) = \sum_{j \in G_u} p_R(j) \\ \pi_B^*(u) = \frac{1}{p_R^*(u)} \sum_{j \in G_u} \pi_B(j) p_R(j) \end{cases}$$

Vê-se assim que $p_R^*(u)$ traduz a probabilidade de uma apólice da carteira se inserir no sub-grupo G_u ($u = 1, \dots, U$) enquanto $\pi_B^*(u)$ representa o prémio médio que vigoraria nesta categoria se se utilizasse a escala Bayes sem qualquer restrição. Como facilmente se depreende, $\pi^*(u)$ constitui a variável em ordem à qual se vai minimizar $Q(S)$, isto é o prémio a definir para as diferentes classes que compõem a categoria u .

Esta minimização é feita como habitualmente, ou seja, dado que

$$\frac{\partial Q(S)}{\partial \pi^*(u)} = 2 \pi^*(u) p_R^*(u) - 2 \pi_B^*(u) p_R^*(u)$$

obtem-se como minimizante

$$\pi^*(u) = \pi_B^*(u) \quad (5.46)$$

isto é a escala Bayes nesta situação mais não será do que o prémio médio obtido para a mesma escala sem restrições adicionais.

Para além da obtenção da escala Bayes para esta situação, também se podem obter extensões aos outros tipos de escalas (linear e geométrica) só que definindo as progressões não em termos de classes individuais mas sim das diferentes categorias. As deduções serão, em termos formais, idênticas aquelas que foram feitas nos pontos anteriores, não sendo por isso necessário nova apresentação.

5.1.2. Um exemplo

Para ilustrar o processo que se acabou de desenvolver, apresenta-se um pequeno exemplo sem se pretender com isso descrever nenhuma situação prática. Noutro capítulo discutir-se-á o caso português.

Considere-se um sistema com 3 categorias definindo-se as regras de transição da seguinte forma:

- Quando se está na primeira categoria, a 1^a participação origina a transferência para a 2^a categoria e qualquer participação adicional a transição para a última categoria. Para quem se encontre na 2^a ou na 3^a categoria qualquer participação origina sempre que se passe para a última categoria no ano seguinte.
- A progressão da 3^a para a segunda categoria é feita depois de 3 anos sem participações enquanto a transição da 2^a para a 1^a apenas necessita de 2 anos limpos.

A modelização deste sistema é feita construindo-se um sistema desdobrado com seis classes (2 referentes à 2^a categoria e 3 à 3^a) que obedeça à seguinte matriz de transição, indicando-se o número de participações que originam a transferência:

Quadro 5.10 - Escalas de prémios - Sistemas de duração variável

Escalas\classes	1	2	3	4	5	6
Bayes sem rest.	8.20	14.22	15.16	20.98	22.41	24.04
linear sem rest.	8.34	11.80	15.26	18.71	22.17	25.63
geom. sem rest.	8.62	10.80	13.53	16.94	21.22	26.58
Bayes com rest.	8.20	14.74		22.80		
linear com rest.	8.16	15.26		22.36		
geom. com rest.	8.30	13.89		23.22		

		categ.	1	2	3		
categ.	classe	1	2	3	4	5	6
1	1	0	-	1	-	-	2 ou +
2	2	0	-	-	-	-	1 ou +
	3	-	0	-	-	-	1 ou +
3	4	-	-	0	-	-	1 ou +
	5	-	-	-	0	-	1 ou +
	6	-	-	-	-	0	1 ou +

Os vectores de prémios, estimados à luz dos diferentes critérios que foram apresentados, foram calculados em condições semelhantes aos testes que foram desenvolvidos na secção 3 ¹⁶ e destinam-se apenas a ilustrar as diferenças que se podem obter.

Refira-se ainda que se supôs um custo médio de 100 unidades monetárias por sinistro. Os resultados permitem verificar que se obtêm prémios de mesma ordem de grandeza, sendo no entanto de referir que as escalas lineares e sobretudo geométrica tendem a apresentar maiores desvios entre situações com e sem restrições adicionais.

Em termos de efeitos na sede de bonus, o ponto mais sensível residirá nas

¹⁶Optou-se por escolher $k = 1$ já que esta classe inicial originava um menor EQM na escala Bayes sem restrições.

Quadro 5.11 - Probabilidade de não participação de um sinistro (%)

Escalas\classes	1	2	3	4	5	6	Pond
Bayes sem rest.	39.0	65.0	61.4	56.9	46.9	30.7	41.7
linear sem rest.	36.1	64.1	61.7	57.1	49.2	34.3	39.8
geom. sem rest.	31.3	62.3	60.3	56.6	50.0	36.5	35.8
Bayes com rest.	39.1	65.2	61.3	57.2	45.4	27.7	42.0
linear com rest.	38.9	60.7	55.5	49.8	46.7	28.9	41.2
geom. com rest.	37.1	65.2	61.8	58.3	46.5	28.7	40.5
Ponderadores	81.1	5.2	6.6	1.7	2.3	3.1	-

regras de transição já que, como mostra o quadro 5.11, o facto de impor restrições nas escalas de prémios terá um efeito bastante menor na probabilidade de não participação dos sinistros, embora se possa ver um agravamento natural.

5.2. Sistemas com penalizações variáveis

Ao contrário do caso anterior onde se tratava de modelizar uma situação muito frequente em termos dos diferentes sistemas em vigor, os sistemas com penalizações variáveis correspondem a uma ideia que, embora bastante interessante dum ponto de vista teórico, não encontrou ainda correspondência prática.

Como se sabe a generalidade dos sistemas de bonus existentes apenas consideram a frequência de sinistralidade e não os custos associados aos mesmos, que no entanto é o aspecto mais importante para a companhia seguradora. Para obviar tal limitação e também para levantar parcialmente a hipótese feita em termos de independência entre custo médio e frequência de sinistralidade, podem considerar-se diversos tipos de sinistros, impondo-se regras de transição para cada um deles.

O exemplo mais evidente seria o separar dos sinistros em duas categorias, com ou sem danos corporais, já que por um lado se trata de uma fronteira clara e por outro de categorias que originam custos médios bem diferentes.

5.2.1. O modelo

Cada apólice passará então a ser caracterizada não por um parâmetro estrutural como até agora, mas por um vector de parâmetros cujos elementos corresponderão à propensão para cada um dos tipos de sinistros. Como facilmente se depreende, as regras de transição também deverão ser adaptadas por forma a definirem penalizações diferenciadas por tipo de sinistro. Por último a hipótese de independência entre custo médio e frequência dos sinistros será apenas necessária dentro de cada tipo de sinistro.

Em termos formais a dedução feita para a escala Bayes será idêntica tendo-se agora presente a natureza multidimensional de $\underline{\theta}$. Assim (5.11) será re-escrito como

$$\pi_B(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int E(X_n | \underline{\theta}) p_{R,\underline{\theta}}^{(n)}(j) dU(\underline{\theta})}{p_R(j)} \quad (5.47)$$

sendo agora

$$p_R(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n p_R^{(n)}(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int p_{R,\underline{\theta}}^{(n)}(j) dU(\underline{\theta}) \quad (5.48)$$

com

$$p_{R,\underline{\theta}}^{(n)} = (\mathbf{P}_{T,\underline{\theta}}^T)^{n-1} \mathbf{e}_k$$

considerando-se as alterações na matriz das probabilidades de transição num passo.

Por outro lado supondo-se, para simplificar a exposição, apenas dois tipos de sinistros, situação a que corresponderá um parâmetro estrutural bi-dimensional,

$$\begin{aligned} E(X_n | \underline{\theta}) &= E \left[\left(\sum_{i=0}^{M_{1n}} Y_{1ni} + \sum_{i=0}^{M_{2n}} Y_{2ni} \right) | \theta_1, \theta_2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=0}^{M_{1n}} Y_{1ni} \right) | \theta_1 \right] + E \left[\left(\sum_{i=0}^{M_{2n}} Y_{2ni} \right) | \theta_2 \right] \\ &= E(M_{1n} | \theta_1) E(Y_1) + E(M_{2n} | \theta_2) E(Y_2) \\ &= E(M_1 | \theta_1) E(Y_1) + E(M_2 | \theta_2) E(Y_2) \end{aligned}$$

estando implícito na dedução que se fez que cada tipo de sinistro apenas é afectado pelo seu parâmetro de risco, que existe independência entre frequência e custo

médio dentro de cada categoria dado o θ respectivo e que custo e frequência são independentes do período de tempo.

Caso se generalize o processo de risco até agora utilizado, isto é caso se admita que M_1 e M_2 , condicionados por θ_1 e θ_2 respectivamente, têm ambos distribuição de Poisson de parâmetros θ_1 e θ_2 , então

$$E(X_n|\underline{\theta}) = \underline{\theta}^T E(\underline{Y})$$

donde

$$\pi_B(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int \underline{\theta}^T E(\underline{Y}) p_{R,\underline{\theta}}^{(n)}(j) dU(\underline{\theta})}{p_R(j)} \quad (5.49)$$

A dedução das escalas linear e geométrica não irá sofrer alterações adicionais uma vez que se alicerça sobre a escala Bayes.

5.2.2. A distribuição estrutural

Quando se utiliza uma modelização deste tipo, uma das maiores dificuldades técnicas residirá no estabelecimento de uma distribuição para o vector dos parâmetros estruturais.

De facto, se no caso uni-dimensional existia uma linha geral de abordagem pelo modelo Poisson - gama ¹⁷, por razões bem evidentes, já numa situação multidimensional o caso é bastante mais delicado, quer pela escassez de estudos concretos, quer pela complexidade da situação.

No único estudo conhecido que tratou uma situação semelhante, *Lemaire* [1985] mantém uma estrutura Poisson-gama para a propensão global à sinistralidade, deduzindo o parâmetro estrutural referente aos sinistros com danos corporais ¹⁸ pela utilização de uma distribuição beta para o quociente entre a propensão para

¹⁷Refira-se no entanto que *Norberg* [1976] utiliza uma distribuição estrutural discreta que é retomada, a título de exemplo por alguns autores, nomeadamente *Borgan & al* [1981] e *Gilde & Sundt* [1989].

¹⁸No trabalho em causa, apenas se consideram dois tipos de sinistros, com ou sem danos corporais. Outras situações teriam certamente uma aplicabilidade bem menor.

os sinistros com danos corporais e a globalidade destes. Uma vez determinada a distribuição condicionada, podem deduzir-se as distribuições marginais bem como a distribuição conjunta.

Outra solução, mais simples mas também menos rica, consistiria em pressupor uma distribuição estrutural discreta para os sinistros na sua globalidade ou para os sinistros que apenas envolvam danos materiais (já que representam a grande maioria dos casos), deduzindo-se para cada um destes valores a distribuição condicionada para os sinistros com danos corporais. A partir daqui retomar-se-ia, *mutatis mutandis*, o processo anterior.

5.2.3. As regras de transição

Se não existem dúvidas que o propósito principal dos sistemas com penalizações variáveis é tomar em consideração o tipo de sinistros (e sobretudo os custos) no estabelecer das regras de transição, também é necessário não esquecer que o objectivo fundamental da actividade seguradora é substituir um risco aleatório por um prémio cuja aleatoriedade, não tendo sido plenamente eliminada já que vigora um sistema de bonus, se deve no entanto situar dentro de limites aceitáveis.

Assim sendo, parece razoável impor por um lado que se definam as penalizações em função de características objectivas dos sinistros e não dos seus custos directos (no fundo o que está em causa é uma melhor avaliação do risco potencial futuro e não tanto uma forma de castigo) e por outro lado que as diferenças não sejam de molde a desequilibrar o sistema. Sublinhe-se que, dada a baixa taxa de sinistros com danos corporais, existirá sempre um elemento aleatório com peso determinante na ocorrência de sinistros deste tipo.

5.2.4. Sede de bonus

Os sistemas com regras diferenciadas irão obviamente minorar fenómenos como a sede de bonus, uma vez que os sinistros com custos médios menores sofrerão penalizações mais fracas.

Um fenómeno como a retenção poderá ser ainda mais reduzido caso exista, como acontece em Portugal, intervenção obrigatória das autoridades policiais para certos tipos de sinistros. Em casos destes a participação à companhia seguradora torna-se quase compulsiva, isto é ter-se-á uma retenção praticamente nula.

A formalização do modelo pode fazer-se generalizando (5.34) que se irá escrever

$$V_j = -\pi_j + V_{1j} + V_{2j} \quad (5.50)$$

no caso de se admitirem dois tipos de sinistros que serão referenciados pelos índices 1 e 2 respectivamente. Ter-se-á

$$V_{\ell j} = \pi_j + \beta^{\frac{1}{2}} E(C_{\ell j}) + \beta \sum_{r=0}^{\infty} g_{\ell j}(r) V_{T_{\ell j}(r)} \quad \ell = 1, 2 \quad (5.51)$$

mantendo as diferentes variáveis o significado que foi definido na secção 4, apenas sendo agora aplicadas as diferentes situações que têm origem nos dois tipos de sinistros. Claro que agora existirão em cada classe do sistema de bonus dois limites de retenção, x_{1j} para os sinistros de tipo 1 e x_{2j} para os outros.

O processo desenvolvido na secção 4 pode ser aplicado a cada um dos $V_{\ell j}$ uma vez que $x_{\ell j}$ apenas influenciará directamente $V_{\ell j}$ e portanto a minimização de qualquer combinação linear convexa dos V_j será equivalente a minimização de todos os $V_{\ell j}$ em ordem ao seu $x_{\ell j}$ respectivo (veja-se a secção 4).

Neste contexto é fácil ver que se está numa situação formalmente semelhante à anterior obtendo-se os limites de retenção através de

$$x_{\ell j} = \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} g_{\ell j}(r) [V_{T_{\ell j}(r+1)} - V_{T_{\ell j}(r)}] \quad \ell = 1, 2 \text{ e } j = 1, \dots, K.$$

Tratar-se-á assim de aplicar o algoritmo descrito na secção 4.1.3 a cada um dos problemas, sendo apenas necessário, na obtenção final de V_j ter presente que se deve retirar o valor do prémio π_j - ver (5.51) - para evitar uma dupla contagem.

5.2.5. Um exemplo

O exemplo que se vai apresentar foi construído com o propósito de ilustrar o procedimento que se discutiu ao longo desta sub-secção. Teve-se no entanto o

cuidado de definir elementos que fossem tanto quanto possível admissíveis para uma situação semelhante à portuguesa, desde que não originassem complicações adicionais numa situação que se quer o mais simples possível.

Considerou-se então um sistema de bonus com 5 classes, tendo como classe inicial $k = 1$, no qual vigoram as regras de transição seguintes:

- cada sinistro envolvendo danos corporais implica uma penalização de 3 classes, enquanto os restantes envolvem apenas uma subida de 1 classe.
- cada ano sem participações origina uma descida de 1 classe.

Em termos de processo de risco, admite-se que ambos os sinistros são gerados por distribuições de Poissom de parâmetros respectivos θ_1 e θ_2 , sendo o segundo grupo referente a sinistros com danos corporais.

Para a distribuição estrutural de θ_1 estabeleceu-se uma distribuição discreta definida da seguinte forma:

θ_1	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.15	0.20	0.30	0.50	$E(\theta_1) = 0.08755$
$u_1(\theta_1)$	0.08	0.12	0.18	0.23	0.17	0.11	0.065	0.025	0.015	0.005	$\sigma(\theta_1) = 0.055$

A distribuição de θ_2 foi, numa primeira fase, elaborada em termos condicionais tendo-se suposto os seguintes valores (em %) para probabilidades de θ_2 condicionadas por θ_1 .

$\theta_1 \backslash \theta_2$	0.005	0.008	0.011	0.014	0.017	0.02	0.03	0.05
0.02	80	15	4	1	0	0	0	0
0.04	60	23	10	4	2	1	0	0
0.06	40	30	17	6	4	2	1	0
0.08	25	30	25	9	6	3	2	0
0.10	10	22	33	15	10	6	3	1
0.12	5	17	20	22	20	10	4	2
0.15	4	15	18	25	21	11	4	2
0.20	1	13	16	25	24	13	5	3
0.30	0.7	11	13.3	24	27	14	6	4
0.50	0.3	10	11.7	23	28	15	7	5

deduzindo-se então a distribuição estrutural conjunta¹⁹ - $\rho(\theta_1, \theta_2) = 42\%$ - a partir da qual se constroi a distribuição marginal de θ_2 ,

θ_2	0.005	0.008	0.011	0.014	0.017	0.020	0.030	0.050	$E(\theta_2) = 0.0105$
$u_2(\theta_2)$	0.291	0.234	0.200	0.114	0.088	0.046	0.021	0.007	$\sigma(\theta_2) = 0.00618$

Num segundo exemplo, utilizaram-se as distribuições marginais de θ_1 e θ_2 mas admitiu-se a independência entre estas variáveis para determinar a distribuição conjunta.

Como distribuição para os custos associados aos dois tipos de sinistros recorreu-se à lognormal, baseados uma vez mais em *van der Laan & Hop* [1989] já que não se dispõe de dados que permitam uma estimação autónoma, tendo-se admitido um desvio padrão 4 vezes superior à média.

Para o custo médio dos dois tipos de sinistros admitiu-se que, em média, um sinistro envolvendo danos corporais era 4 vezes mais gravoso do que um que apenas originasse danos materiais, valores que, como é evidente, vão depender em boa parte do que se definir como sendo um sinistro com danos corporais. Por forma a manter a mesma unidade monetária do que nos casos onde não se discriminava a

¹⁹Como habitualmente, ρ representa o coeficiente de correlação

natureza dos sinistros, fixou-se o custo médio de um sinistro com danos materiais em aproximadamente 0.804 e consequentemente um sinistro com danos corporais terá por valor esperado 3.216, o que permite garantir que a unidade monetária continua a ser fixada como o valor médio de um sinistro.

Considerou-se finalmente um horizonte de 20 anos recorrendo-se aos ponderadores definidos na secção 3.

No quadro 5.12 apresentam-se os resultados mais significativos referentes aos dois casos ensaiados. Estes elementos sublinham quatro ideias base:

- O povoamento das diferentes classes do sistema de bonus não se altera com as diferentes distribuições estruturais. Sublinhe-se que as distribuições marginais de θ_1 e de θ_2 são idênticas nos dois casos, apenas se registando alterações na distribuição conjunta.
- A independência entre os parâmetros de risco gera uma escala Bayes ligeiramente mais concentrada, sendo este fenómeno essencialmente visível nas classes mais elevadas dada a assimetria de povoamento. O facto de $\rho(\theta_1, \theta_2)$ ser positivo no primeiro caso, irá naturalmente impor este maior alongamento.
- Esta mesma correlação entre os parâmetros de risco também originará limites de retenção mais elevados para os dois tipos de sinistros e consequentemente uma probabilidade maior de não participação de um sinistro sem no entanto alterar significativamente as conclusões. Em termos ponderados ²⁰ esta probabilidade será de 13.1% no primeiro caso e de 10.7% na situação de independência.
- Em suma, parece poder concluir-se que existe uma certa robustez na formulação da distribuição conjunta o que não deixa de ser significativo uma vez que irão inevitavelmente existir problemas de algum peso na estimação desta distribuição.

²⁰utilizando-se os $p_R(j)$ como ponderadores.

Quadro 5.12 - Sistema de penalizações variadas

Cl.	Distribuição 1						Distribuição 2 (indep.)					
	Esc. Bayes		Lim. Retenção				Esc. Bayes		Lim. Retenção			
	$p_R(j)$	$\pi_B(j)$	x_{1j}	x_{2j}	p_{1j}	p_{2j}	$p_R(j)$	$\pi_B(j)$	x_{1j}	x_{2j}	p_{1j}	p_{2j}
1	88.4	9.4	2.8	10.5	12.5	11.9	88.4	9.5	2.3	8.3	10.2	9.3
2	7.7	12.0	7.1	18.1	27.3	19.5	7.8	11.6	5.7	14.6	23.1	16.2
3	2.1	14.1	8.8	15.7	31.8	17.3	2.1	13.2	6.9	12.6	26.8	14.2
4	1.4	14.2	11.6	11.5	37.9	12.9	1.3	13.1	9.4	9.2	33.2	10.4
5	0.5	18.7	7.5	7.7	28.5	8.6	0.4	17.2	6.2	6.4	24.9	7.0

As probabilidades estão referidas em %

As escalas de prémios e os limites de retenção estão multiplicados por 100

Como termo de comparação com esta situação apresenta-se no quadro 5.13 os resultados que se obteriam caso existisse um sistema clássico vigorando o sistema 1 ou o sistema 2 de regras de transição já que as regras duplas que se definiram se situam entre estes dois sistemas, embora bastante mais próximas do primeiro. Dado a grande similitude nos resultados obtidos apenas se referem os elementos correspondentes ao primeiro tipo de distribuição conjunta.

Como seria de esperar, os limites de retenção situam-se, nas classes mais povoadas, entre os valores para danos materiais e danos corporais obtidos no sistema de penalizações variáveis.

No entanto, em ambos os casos, irão originar probabilidades de não participação de um sinistro superiores ao sistema anterior, sendo este fenómeno ainda mais evidente no caso do sistema 2 de regras de transição, pese embora a existência de valores menos exagerados nas piores classes do sistema. Em termos ponderados as probabilidades de não participação de um sinistro serão de 15.5% (regras 1) ou de 24.5% (regras 2).

Assinalem-se ainda as diferenças entre os prémios a pagar nas várias situações que podem assumir valores significativos.

Quadro 5.13 - Sistemas clássicos de regras de transição

Cl.	Regras 1				Regras 2			
	Esc. Bayes		Lim. Retenção		Esc. Bayes		Lim. Retenção	
	$p_R(j)$	$\pi_B(j)$	x_{1j}	p_{1j}	$p_R(j)$	$\pi_B(j)$	x_{1j}	p_{1j}
1	90.1	10.0	3.3	13.3	82.4	9.8	5.9	22.1
2	8.1	12.8	10.0	32.3	6.3	12.2	10.9	33.9
3	1.4	16.7	19.6	46.9	7.7	12.6	14.3	39.8
4	0.3	23.1	30.3	57.0	1.9	16.0	11.5	35.0
5	0.1	31.4	17.9	44.8	1.7	17.8	6.0	22.3

As probabilidades estão referidas em %

As escalas de prémios e os limites de retenção estão multiplicados por 100

Capítulo 6

Principais Estudos Empíricos

Este capítulo destina-se não só a fornecer uma apresentação genérica dos estudos empíricos mais significativos que foram publicados nos últimos anos, como também a servir como indicador por forma a permitir avaliar em termos comparativos os resultados práticos que se irão obter para o caso português.

Trata-se de uma área onde os estudos feitos não registam grande divulgação por razões que se prendem com a estratégia das seguradoras, sobretudo em países onde o mercado vive numa situação extremamente competitiva.

Uma solução possível seria recorrer à análise das diferentes tarifas em vigor, mas é necessário não esquecer que estas incluem muitos elementos que não se prendem directamente com os resultados estatísticos que serviram de suporte à sua construção, tornando assim muito mais complexas as comparações que se queiram estabelecer.

Dentro dos artigos mais significativos que se publicaram nesta área, procurou-se dar maior peso aos que se referem à selecção e estimação dos impactos dos factores mensuráveis à priori se bem que se refira também um estudo comparativo dos principais sistemas de bonus em vigor na Europa e no Japão.

1. O caso belga visto por Lemaire

O trabalho de *Lemaire* [1985] insere-se num projecto mais vasto em que se apresenta uma crítica à tarifa em vigor na Bélgica. Começando por proceder a uma descrição das tarifas mais representativas na Europa (França, Reino Unido, Países Baixos, Suécia, Suíça, RFA) e na América do Norte (EUA e Canadá), para além duma referência pormenorizada ao sistema Belga, Lemaire desenvolve a análise estatística da carteira de uma seguradora propondo algumas alterações ao sistema em vigor.

No entanto Lemaire não questiona teoricamente a forma de abordar este estudo tomando como assente uma separação clara e inultrapassável entre critérios mensuráveis à partida e factores de correcção à posteriori. Assim sendo, não se consegue depreender uma proposta final, retirando-se antes contributos parciais para a construção de um novo sistema.

A classificação à priori é abordada recorrendo à regressão linear múltipla, com a utilização de uma análise passo a passo onde se nota algum afastamento do autor em relação à evolução mais recente da econometria. Ao recorrer a esta metodologia quer como forma de selecção de variáveis (análise passo a passo) quer utilizando as estimativas dos parâmetros como indicadores de propensão à sinistralidade, Lemaire está a definir de forma implícita uma estrutura aditiva para os factores mensuráveis à priori.

Ao invés, no estudo do sistema de bonus/malus, embora nada se adiante sobre a forma de integração deste na estrutura anteriormente definida, é claro o pressuposto de este constituir um factor multiplicativo que, depreende-se, deve ser aplicado ao modelo estimado com os factores directamente mensuráveis.

Desta dupla abordagem apenas se destacará neste ponto a análise à priori já que o sistema de bonus será referido na secção 3 do presente capítulo.

1.1. Os elementos disponíveis

O estudo das características mensuráveis à priori baseou-se na observação da carteira de uma seguradora belga, mais concretamente das 106974 apólices que se mantiveram em vigor entre 1 de Julho de 1975 e 30 de Junho de 1976. Saliente-se que Lemaire discute a escolha do ano de referência por forma a ponderar duas características à partida antagónicas: por um lado seleccionar um ano suficientemente recuado para que a generalidade dos sinistros esteja encerrada e, por outro lado, não tão distante que se tenham verificado alterações significativas no comportamento dos segurados, ou nos aspectos institucionais que podem influenciar a sinistralidade automóvel (no caso do estudo de Lemaire a obrigatoriedade do uso do cinto de segurança por exemplo).

Lemaire observou então as características disponíveis referentes quer à sinistralidade (com a particularidade de ter elementos sobre o número de sinistros sem responsabilidade do segurado), quer a eventuais variáveis explicativas desta. Neste campo conseguiu cobrir de forma bastante completa as características do veículo, com excepção talvez da quilometragem anualmente percorrida, e com maiores limitações a natureza do segurado (curioso se torna salientar a existência de variáveis típicas da Bélgica como a zona linguística) e do condutor habitual.

A escolha da variável endógena também foi objecto de um estudo preliminar, já que após rejeitar, para os dados em estudo, a independência entre frequência e custo médio por sinistro, Lemaire conclui pela necessidade de proceder a duas análises distintas. No entanto atribui desde logo maior credibilidade ao modelo em frequência, escolha essa que os resultados obtidos justificam plenamente.

1.2. As conclusões principais

Nos quadros 6.1 e 6.2 sintetizam-se os resultados obtidos por Lemaire, utilizando-se também o primeiro quadro para referir de forma mais pormenorizada as variáveis disponíveis, bem como os coeficientes referentes às características retidas. Sublinhe-se ainda que se referem as variáveis por ordem decrescente da sua influência no modelo, quando apreciada pelo processo iterativo.

Quadro 6.1 - Análise em frequência *Lemaire* [1985]

variável	coef. ¹	signif. ²	R (em %)
classe de bonus/malus ³	2.328	0.0	9.836
nº sinistros sem responsabilidade	67.980	0.0	10.686
potência do veículo (cavalos)	0.538	0.0	11.346
idade do veículo (anos)	4.827	0.0	11.956
idade do condutor habitual (anos)	-0.799	0.0	12.296
seguro incluindo danos próprios ⁴	30.123	0.0	12.551
povoação com menos de 5 mil habitantes ⁴	-33.466	0.0	12.781
condutor francófono ⁴	22.079	0.0	13.102
povoação de 5 a 40 mil habitantes ⁴ <	16.578	0.0	13.221
constante da regressão	-48.171	-	-
veículo desportivo ⁴	-	13.4	13.230
condutor sedentário ⁴	-	25.5	13.235
preço de compra do veículo	-	47.9	13.236
prémio pago no início do período	-	53.3	13.238
veículo de passageiros ⁵	-	61.8	13.239
veículo pertencente a uma empresa ⁴	-	65.8	13.240
cilindrada (cm ⁴)	-	76.3	13.240
combustível diesel	-	75.9	13.240
condutor de sexo feminino	-	96.9	13.240

¹ valores multiplicados por 10³.

² valores em % e em valor absoluto referentes ao teste de Student.

³ sistema com 18 classes correspondendo a classe 1 à situação de maior bonus.

⁴ variáveis booleanas referindo-se a característica que corresponde ao valor 1.

⁵ o valor 0 corresponde aos veículos mistos.

Os resultados do quadro 6.1 merecem alguns comentários o primeiro dos quais para sublinhar a fraca qualidade do ajustamento em termos do coeficiente de correlação. Se tal situação encontra uma primeira justificação no facto da variável endógena ser discreta (ver a definição de *erro puro* nos modelos lineares generalizados), não se pode deixar de referir outras possíveis causas para este resultado como sejam a provável não inclusão de variáveis significativas (como a quilometragem anualmente percorrida por exemplo) ou uma deficiente formalização do modelo quer na linearidade da estrutura (que corresponde no fundo a uma tarifa aditiva), quer ainda numa evidente simplificação na distribuição dos sinistros ao admitir que esta tenha um comportamento próximo da lei normal.

As variáveis retidas após a análise passo a passo carecem também de algumas observações:

- O número de sinistros sem culpa do segurado, sendo uma informação interessante já que estará eventualmente relacionada com uma certa propensão a criar situações potencialmente perigosas, pode também ser interpretado como função directa da quilometragem percorrida por exemplo. Não deixa de qualquer forma de ser questionável a qualidade desta variável sobretudo se avaliada num contexto semelhante ao português.
- Nas características do veículo destacam-se a potência e a idade já que as restantes variáveis parecem não acrescentar grande significado ao poder explicativo do modelo. Lemaire refere aliás que com a entrada da variável potência perdem muito significado a cilindrada e o preço de venda. Refira-se ainda que, na tarifa belga, existe um agravamento para os veículos desportivos o que justifica a consideração deste factor que está aliás presente noutros trabalhos de autores belgas (*Lemaire [1987]* por exemplo discute uma fundamentação objectiva para este conceito). Uma palavra ainda para a idade do veículo que poderia ganhar com uma agregação por grupos de anos já que num estudo introdutório feito em termos marginais por Lemaire este comportamento está longe de se apresentar com um perfil linear.
- As características do condutor habitual resumem-se à idade, mantendo plena

Quadro 6.2 - Análise pelos custos Lemaire [1985]

variável	signif. ¹	R em (%)
classe de bonus/malus (1 - bonus max. - a 18)	0.0	-
nº sinistros sem responsabilidade	0.0	1.755
potência do veículo (cavalos)	2.6	4.331
condutor francófono ²	1.3	4.401

¹ valores em % e em valor absoluto referentes ao teste de Student

² variável booleana referindo-se a característica que corresponde ao valor 1

validade a observação anteriormente feita sobre os benefícios de uma eventual agregação. O sexo, ao contrário do que sucede noutros estudos não apresenta interesse estatístico significativo.

- No que diz respeito ao segurado registam-se, para além de variáveis referentes ao seu grau de ruralidade, deste, algumas características próprias de um país como a Bélgica, adiantando Lemaire como justificação para a sobre-taxa a aplicar aos francófonos uma certa "latinidade" que se traduziria por uma maior propensão ao sinistro ou uma diferente implantação da rede de autoestradas com maior peso na zona flamenga.
- Uma palavra por fim para os factores omissos, entre os quais se sublinha a natureza do segurado (empresa ou particular) que poderia ganhar em ser integrada na variável idade do condutor habitual já que quando se trata de uma empresa esta característica encontra-se omissa. Por outro lado o facto do modelo não ter considerado o prémio pago no sistema em vigor na Bélgica como factor correlacionado com o risco não deixa de ser um indicador particularmente claro da inadequação daquela tarifa.

Em termos de custos, obtêm-se resultados ainda mais fracos (quadro 6.2), mantendo-se apenas como factores significativos a potência do veículo, a posição da apólice na escala de bonus, o número de sinistros sem responsabilidade e a zona linguística do segurado.

Sublinhe-se a eliminação das variáveis regionais o que parece confirmar que se se verifica uma maior frequência de sinistralidade nas zonas urbanas, o custo médio por sinistro tende a ser menor o que conduz à eliminação deste factor na análise pelos custos.

2. Nova tarifa nos Países Baixos

O estudo desenvolvido pelo grupo Astin dos Países Baixos teve por finalidade responder a uma solicitação directa das principais seguradoras do país que pretendiam uma reformulação prática da tarifa até então em vigor.

O trabalho publicado, *de Wit* [1982], é composto por um conjunto de 7 artigos escritos por vários autores que, se bem que aborde o conjunto dos problemas inerentes ao trabalho de reformulação da tarifa, não constitui um todo uniforme.

Começando por traçar um panorama do mercado segurador para o ramo automóvel, os autores dedicam seguidamente dois capítulos à forma de preparar os dados significativos para o estudo a desenvolver, passando então a uma análise das diferentes variáveis em termos marginais. O estudo do sistema de bonus/malus é desenvolvido no capítulo seguinte, sendo este aspecto tratado, como é corrente na generalidade dos trabalhos publicados, de forma autónoma face aos restantes factores. No artigo seguinte, procedem à construção da tarifa (definição do modelo e processo de estimação) admitindo o sistema de bonus existente como fixado em termos de classes e regras de transição, apenas se estimando os prémios a impor nas diferentes classes, aspecto que contribui, se bem que com algumas limitações, para a interligação das duas etapas no processo de definição da tarifa. Dedicam por fim o último ponto a discutir o problema, um pouco mais teórico, de saber em que condições a transição entre sistemas de bonus pode ser viável.

Antes de apresentar a modelização efectuada, uma palavra apenas para salientar o interesse da discussão em torno da construção das eventuais variáveis explicativas, tentando identificar os factores de risco de forma autónoma, para posteriormente analisar quais as variáveis que poderiam avaliar estes mesmos factores, nem

que fosse de forma indirecta. Este ponto não se pode desligar nem do contexto em que se desenvolve o estudo (grupo de trabalho apoiado pelas principais seguradoras), nem do grau de informatização existente que se traduz por um elevado número de características disponíveis e por uma invejável qualidade do aparelho estatístico central.

2.1. As hipóteses de partida

O estudo incidiu sobre cerca de 800 mil apólices referentes a 5 seguradoras, tendo-se considerado 3 factores:

- Uma variável regional com 3 zonas distintas (a primeira de fraca sinistralidade correspondendo ao nordeste e sudoeste do país, a segunda considerada “normal” e a terceira cobrindo as 3 áreas urbanas principais - Amsterdão, Roterdão e Haia - bem como a região sudeste).
- Um sistema de bonus/malus com 14 níveis, onde se incluíram factores como a idade do condutor habitual do veículo e a profissão do segurado (através de classes iniciais distintas no sistema de bonus) para além dos aspectos habituais referentes à sinistralidade passada. Este é um dos pontos mais característicos desta tarifa.
- O peso do veículo com 18 classes. Esta variável, segundo os autores, destina-se não só a diferenciar as categorias de veículos como também a medir de forma indirecta factores como a quilometragem anualmente percorrida e o uso que é feito do veículo (quanto mais pesado maior o uso).

A integração do sistema de bonus na tarifa é feita considerando-se apenas o povoamento das diferentes classes tal como foi originado pelas regras de transição. Neste ponto assiste-se a uma maior integração do que em Lemaire, se bem que não se possa falar de uma abordagem global já que não se utiliza o estudo específico que se fez para o bonus/malus na determinação dos níveis de prémios.

A tarifa é construída com base num modelo multiplicativo o que permite interpretar os coeficientes estimados com descontos/agravamentos em relação a uma situação padrão, facilitando também a inclusão do sistema de bonus nos termos em que é feita, já que esta variável pode ser tratada como outra qualquer. Esta definição da estrutura da tarifa resultou de considerações práticas das seguradoras que apoiaram este estudo, não se discutindo outras estruturas possíveis.

Van Eeghen, Nijssen e Ruygt [1982] optaram por ensaiar três metodologias distintas, isto é a de Bailey e Simon (BS), a dos totais marginais (MT) e o método directo (DM). Tendo-se apresentado estes métodos no capítulo 3 apenas se discutirão os resultados obtidos, tendo presente que se escolheram como variáveis endógenas quer o número de sinistros quer o montante de indemnizações pagas (incluindo provisões) tendo sido esta última variável objecto de uma filtragem para limitar o impacto das indemnizações de valor muito superior à média.

2.2. As conclusões obtidas

Os resultados obtidos constam do quadro 6.3 e permitem uma leitura dos resultados a dois níveis. Por um lado podem ser utilizados para aferir, num caso prático, do comportamento das diferentes metodologias, e por outro vão permitir comentar estes mesmos resultados em termos práticos.

O comportamento dos diferentes métodos Este ponto ilustra os comentários que foram feitos no capítulo 3, quando se apresentaram as diferentes metodologias de estimação.

Salienta-se a perfeita concordância entre as estimativas produzidas pelos métodos MT ("Marginal Totals") e DM ("Direct Method"), verificando-se algumas diferenças face às oriundas de BS ("Bailey and Simon"), nomeadamente no que concerne à variável regional quando se opta pelo montante de indemnizações já que a análise em termos do número de sinistros mostra maior concordância.

A origem de tais diferenças reside no peso excessivo dado pelo método de Bayley & Simon aos "outliers" uma vez que não só se minimizam os quadrados

Método BS aplicado às indemnizações

Região	1.02	0.97	1.00															
Bonus	1.24	1.40	0.98	0.80	0.80	0.69	0.61	0.53	0.46	0.41	0.40	0.37	0.35	0.28				
Peso	165	231	232	257	276	318	327	367	395	394	390	395	447	431	456	508	583	615

Método MT aplicado às indemnizações

Região	0.92	0.91	1.00															
Bonus	1.21	1.39	0.96	0.80	0.80	0.68	0.61	0.52	0.46	0.41	0.39	0.37	0.34	0.29				
Peso	162	230	234	260	278	320	327	369	396	388	387	392	422	424	447	500	564	571

Método DM aplicado às indemnizações

Região	0.93	0.94	1.00															
Bonus	1.25	1.41	0.96	0.80	0.81	0.69	0.62	0.53	0.46	0.42	0.41	0.37	0.35	0.29				
Peso	158	234	232	252	277	310	315	357	377	365	375	377	417	425	445	501	566	554

Método BS aplicado à freq. de sinistralidade

Região	0.85	0.85	1.00															
Bonus	1.06	1.22	0.82	0.80	0.68	0.60	0.50	0.43	0.38	0.35	0.33	0.32	0.31	0.26				
Peso	0.14	0.17	0.17	0.18	0.19	0.21	0.21	0.22	0.24	0.24	0.25	0.25	0.26	0.25	0.25	0.28	0.29	0.30

Método MT aplicado à freq. de sinistralidade

Região	0.83	0.84	1.00															
Bonus	1.06	1.22	0.81	0.80	0.68	0.60	0.50	0.43	0.38	0.35	0.32	0.32	0.31	0.26				
Peso	0.14	0.17	0.17	0.18	0.19	0.21	0.21	0.22	0.24	0.24	0.25	0.25	0.26	0.25	0.25	0.27	0.28	0.30

Método DM aplicado à freq. de sinistralidade

Região	0.83	0.85	1.00															
Bonus	1.06	1.22	0.82	0.80	0.68	0.60	0.50	0.43	0.38	0.35	0.33	0.32	0.31	0.26				
Peso	0.14	0.17	0.17	0.18	0.19	0.21	0.21	0.22	0.24	0.23	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.28	0.28	0.30

dos desvios mas onde se pondera estas diferenças quadráticas pelo inverso da estimativa obtida - $(x_i y_j)^{-1}$ na nomenclatura do capítulo 3 - facto este que tende a minimizar o peso a atribuir às células com elevada propensão ao risco.

Ao invés, o estudo das frequências de sinistralidade apresenta uma concordância quase perfeita entre os três métodos ensaiados.

Os resultados Na interpretação dos resultados privilegiar-se-á o método MT já que, como se viu no capítulo 3, ele pode ser interpretado como caso particular da máxima verosimilhança no caso da análise em frequência e dentro de certas hipóteses adequadas.

Duma forma geral, parece existir um número excessivo de classes para todas as variáveis consideradas. No caso da estrutura regional as diferenças entre as duas primeiras regiões, que correspondem ao país no seu todo com excepção das três áreas urbanas mais significativas e da zona de maior industrialização, são insignificantes quer se considere os custos quer em termos de frequência parecendo portanto ser de reagrupar estas duas classes. No sistema de bonus, quando se definem os prémios por este meio, também existem algumas classes redundantes sobretudo na análise pelos custos. Mas, mais grave do que esta redundância, será a existência de um prémio na classe 2 superior ao que vigora na classe 1 (a pior classe na estrutura apresentada)! A variável peso do veículo também apresenta diversas incongruências na sua evolução, situação em que parece discutível a sua utilização.

Para além desta crítica à admissibilidade dos valores estimados, saliente-se que quer o sistema de bonus quer o peso do veículo conduzem a situações de muito contraste na medida em que se pode obter diferenças relativas superiores a 350% entre os casos extremos.

Assinale-se por fim que estas diferenças tendem a ser mais acentuadas quando se recorre aos custos se bem que os dois comportamentos não sejam antagónicos.

3. Alguns sistemas de bonus em vigor

Num artigo encomendado pela revista norte americana "Journal of risk and Insurance", *Lemaire* [1988], actualizando a intervenção proferida no XX Astin Colloquium (*Lemaire* [1987]), apresenta uma análise comparativa entre os principais sistemas de bonus que se encontram em vigor na Europa Ocidental e no Japão.

Este autor começa por recordar que, ao contrário dos Estados Unidos onde as tarifas no ramo automóvel estão essencialmente baseada nos factores directamente mensuráveis, existem outros países (nomeadamente aqueles que são analisados no seu estudo) onde as estruturas tarifárias atribuem bastante mais importância aos sistemas de bonus, isto é a uma análise à posteriori dos riscos assumidos pela seguradora. Foi provavelmente tendo em conta o interesse existente em conhecer esta realidade que os editores convidaram *Lemaire* ¹ a apresentar os principais sistemas de bonus em vigor.

Este estudo debruça-se sobre a situação em vigor em 13 países ² e compõe-se de 3 partes fundamentais que serão abordadas nas subsecções que se seguem.

3.1. Processo de risco e metodologia de análise

Neste domínio, realça-se o recurso ao instrumental definido em *Lemaire* [1985] e retomado em *Lemaire* [1987], nomeadamente os conceitos de eficiência dos sistemas de bonus e de limite médio de retenção, pesem embora as limitações que lhes são inerentes (ver capítulo 5 secções 2 e 4).

A única novidade a destacar em relação ao que foi apresentado no capítulo 5 consiste no conceito de nível estacionário médio (N.E.M.) que se destina a comparar sistemas com um número de classes e regras de transição diferentes, procurando situar em termos relativos a posição do segurado médio na escala de bonus,

¹Após ter sido professor na Universidade Livre de Bruxelas e consultor do governo belga nestas áreas, *Lemaire* encontra-se agora a trabalhar nos Estados Unidos, estando portanto numa posição privilegiada para este tipo de abordagens.

²Ver quadro 6.4.

e que se define como

$$\text{N.E.M.} = \frac{\text{prémio médio} - \text{prémio mínimo}}{\text{prémio máximo} - \text{prémio mínimo}} \quad (6.1)$$

sendo o prémio médio avaliado em termos da distribuição estacionária, obtendo-se assim uma medida que permite situar a posição do segurado médio numa escala de 0 a 100, uma vez que se costuma apresentar esta medida em termos percentuais.

Em termos de processo de risco, este autor trabalha com o habitual processo Poisson-Gama tendo escolhido os parâmetros da gama por forma a obter uma média de 10% e uma variância de 10.7%. A taxa de desconto foi fixada em 93% e admitiu-se uma taxa de 6% na chegada de novas apólices à carteira, tendo-se construído um modelo, baseado na situação belga, para estimar as saídas de carteira nas diferentes classes com base na taxa média de sinistralidade em cada classe.

A distribuição do custo associado com cada sinistro foi estabelecida com base na situação belga e analisa-se o comportamento de um segurado cuja taxa de sinistralidade seja de 13.64% o que se traduzirá, no sistema belga, numa taxa de sinistros declarados de cerca de 10%, admitindo-se que o segurado segue uma política óptima.

3.2. Apresentação dos diferentes sistemas de bonus

Dada a variedade dos sistemas apresentados, não se entrará neste domínio, remetendo-se o leitor para o artigo de Lemaire. No entanto sublinha-se que, no caso norueguês existe um sistema alternativo desenvolvido pela Storebrand Insurance Company com características bastante originais e cuja apresentação pode ser vista de forma mais pormenorizada em *Neuhaus* [1987], que aplica os conceitos desenvolvidos por Sundt em 1987 e posteriormente publicados em *Sundt* [1988].

Quadro 6.4 - Sistemas de bonus

Países	N.E.M. ¹	Pen. Entrada ²	Eficiência ³	R.M.O. ⁴	Nº Classes	Retenção ⁵
Bélgica	5.7	37.3 ou 61.5	6.7 ou 8.4	203	18	40
Finlândia	22.1	150.2	13.7	643	14	128
França	9.0	69.5	16.8	414	301	82
R.F.A.	16.5	299.4	12.3	357	18	71
Itália	7.3	64.0	2.5	6	13	1
Japão	18.4	135.6 a 182.7	14.8	83	16	17
Luxemburgo	10.1	86.0	10.1	214	22	43
P. Baixos	27.0	85.4 a 164.9	20.1 a 23.4	637	14	127
Noruega	—	161.8	21.2	757	22	150
Espanha	36.7	31.9	6.5	329	5	65
Suécia	30.1	204.5	17.7	900	7	179
Suissa	11.9	82.2	22.2	420	22	83
R. Unido	16.8	93.0	10.6	434	7	86

¹O nível estacionário médio está expresso em % utilizando-se (6.1).

²Refere-se a penalização como % em relação ao nível estacionário médio.

³em %

⁴Retenção Média Óptima em dolares dos E.U.A.

⁵O custo médio de um sinistro é 100.

3.3. Análise comparada

Para comparar os resultados obtidos com os diferentes sistemas, Lemaire utiliza o nível estacionário médio, o acréscimo de penalização imposto aos novos segurados, a eficiência do sistema bem como a retenção média óptima.

Para além destes indicadores, acrescentou-se no quadro 6.5 dois elementos adicionais, o número de classes de cada sistema bem como a avaliação dos níveis de retenção como percentagem do custo médio dos sinistros.

Na interpretação dos resultados é necessário ter presente que os diferentes

sistemas foram testados nas mesmas circunstâncias que podem não corresponder exatamente à situação em vigor nos países para os quais foram concebidos, talvez assim se interpretando melhor os resultados referentes aos casos italiano e espanhol.

As conclusões tiradas por Lemaire sintetizam-se em 5 conselhos:

- Recurso a sistemas com bastantes classes.
- Introduzir penalizações tão severas quanto possíveis para o primeiro sinistro.
- Não introduzir sistemas que permitam acelerar a saída da zona de malus.
- No que se refere aos condutores mais novos é preferível proceder à sua incorporação no sistema através de uma classe inicial mais alta do que recorrer a uma penalização à priori.

4. O modelo hierárquico de Sundt

A aplicação desenvolvida por *Sundt* [1987] é construída para ilustrar a utilização dos modelos hierárquicos na elaboração e estimação de tarifas para o ramo automóvel, tendo por base um modelo de tipo multiplicativo. Este modelo foi apresentado na secção 3.2 do capítulo 3, utilizando-se aqui a simbologia então definida.

Dada a natureza do trabalho, não houve uma preocupação de tratar de forma exaustiva todas as situações (253 modelos como se depreende do quadro 6.4), antes se promovendo a análise das diferentes estimativas obtidas e que tiveram por base cada um dos dois modelos propostos, já que, para além do modelo hierárquico que se referiu, *Sundt* também apresenta um modelo de regressão sem recorrer a este conceito.

Os veículos encontram-se caracterizados por duas variáveis básicas (potência e rácio preço/peso) para além das características marca e modelo que servirão de base à construção da hierarquia. A opção por estas características teve por base critérios de admissibilidade e coerência que foram estabelecidos em função do modelo não hierárquico (veja-se *Sundt* [1987]).

No quadro 6.5 apresentam-se as marcas existentes na carteira em estudo, referindo-se o número de modelos existentes em cada caso bem como o número de apólices. Tenha-se presente que apenas se consideraram as marcas e modelos de veículos em venda na Noruega em 1984, sendo os preços referentes a este mesmo ano e tirados de uma publicação especializada ³.

O primeiro modelo, não hierárquico, foi estimado tendo por base os diferentes modelos de veículos, indicando-se no quadro 6.6 os exemplos referidos em Sundt [1987] onde Y_k representa a taxa de sinistralidade observada, μ_k a taxa média estimada para o grupo e m_k o estimador de credibilidade para o prémio puro de risco. Relembre-se que a estimativa média para o grupo é obtida fazendo $\hat{\mu}_k = \underline{x}'_k \hat{\underline{\beta}}$ onde $\hat{\underline{\beta}}$ é obtido por regressão linear das 3 características retidas (também se considerou, para além dos elementos já mencionados um termo constante) face à sinistralidade em cada um dos 253 modelos.

O modelo hierárquico, irá considerar num primeiro nível a marca dos veículos, estimando-se então \underline{b}_n com base nos dados referentes a cada marca separadamente, e $\underline{\beta}$, como ponderação dos diferentes vectores \underline{b}_n , uma vez que as diferentes marcas apresentam graus de exposição ao risco muito variáveis.

Uma vez obtidos estes elementos bem como Δ_n , obtêm-se, aplicando (3.12), os estimadores de credibilidade para os efeitos das características técnicas dentro de cada marca, $\tilde{\underline{b}}_n$, que se apresentam no quadro 6.5, indicando-se também o vector $\hat{\underline{\beta}}$.

Num segundo nível constroi-se o estimador de credibilidade para o prémio puro de risco filtrado ⁴ recorrendo a (3.12), resultados que figuram no quadro 6.6, tendo-se designado por $\hat{\mu}_{1nk}$ e $\hat{\mu}_{2nk}$ as estimativas obtidas por aplicação directa dos vectores $\hat{\underline{\beta}}$ e $\tilde{\underline{b}}_n$ respectivamente às características de cada veículo, isto é

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{1nk} = \underline{x}'_{nk} \hat{\underline{\beta}} \\ \hat{\mu}_{2nk} = \underline{x}'_{nk} \tilde{\underline{b}}_n \end{cases}$$

³Opplysningsradet for Veitrafikken, edição de 1984.

⁴Veja-se o processo de filtragem na secção 3.2 do capítulo 3.

ou seja $\hat{\mu}_{1nk}$ representará a média esperada em função do comportamento do coletivo, tendo em conta, claro está, as características técnicas do veículo em causa (equivale no fundo a $\hat{\mu}_k$ no modelo não hierárquico) enquanto $\hat{\mu}_{2nk}$ traduzirá a mesma ideia mas tendo apenas por base a marca do veículo na estimativa do vector de parâmetros.

Como se disse, apresentam-se no quadro 6.5 os códigos das marcas (para cruzar os resultados com o quadro 6.6), bem como os vectores \tilde{b}_n e o vector $\underline{\beta}$ que se referem, como é evidente, ao modelo hierárquico.

A tradução destes resultados é um tanto ou quanto difícil uma vez que se devem considerar os três elementos do vector \tilde{b}_n de forma conjunta. No entanto um elemento de valor mais elevado traduzirá uma maior sensibilidade da marca em relação à variável correspondente a este coeficiente o que permite tirar 3 conclusões básicas:

- Estabilidade do termo constante para as diferentes marcas. A amplitude máxima que se obtém entre as estimativas corresponde a menos de 3 % do coeficiente médio que se obtém.
- No que toca ao coeficiente referente à potência do veículo, assinala-se um comportamento contrário à tendência geral para 3 marcas (Mercedes-Benz, Peugeot e sobretudo Volvo) para as quais um aumento de potência corresponde, *cæteris paribus*, a uma diminuição do risco o que não deixa de ser curioso.
- Ao invés, também existem 3 marcas (BMW, Citroen e Fiat) que apresentam uma sensibilidade extrema a este factor mas de sentido "normal". Para estas marcas o outro factor, preço/peso, desempenha um papel compensatório, já que origina coeficientes de sinal contrário à situação standard. Aliás um fenómeno semelhante, embora de sinal contrário, ocorre no caso anterior, já que os coeficientes mais elevados no factor preço/peso correspondem às marcas que têm coeficiente negativo no factor potência.

Quadro 6.5 - As marcas analisadas

Cod	Marca	número		\tilde{b}_n (x 100)		
		mod.	obs.	Cte	Potencia	preço/peso
11	Audi	7	1112	-5.086	1.078	0.762
14	BMW	11	2754	-5.181	5.778	-2.127
15	Citroen	10	1190	-5.134	3.461	-0.683
16	Fiat	7	782	-5.132	3.384	-0.638
17	Ford Inglesa	7	2322	-5.091	1.332	0.631
18	Ford Alemã	24	13107	-5.102	1.853	0.276
24	Lancia	1	58	-5.090	1.263	0.662
25	Mercedes Benz	7	1561	-5.058	-0.309	1.623
31	Opel	33	8860	-5.065	0.014	1.424
33	Peugeot	14	1467	-5.059	-0.233	1.643
34	Renault	1	950	-5.100	1.753	0.355
37	SAAB	6	3382	-5.078	0.707	1.019
39	Skoda	2	248	-5.093	1.407	0.577
45	Volkswagen	11	3145	-5.106	2.029	0.170
46	Volvo	19	3946	-5.043	-1.066	2.107
47	Daihatsu	2	105	-5.086	1.094	0.775
53	Subaru	6	349	-5.093	1.400	0.575
54	Mitsubishi	14	1844	-5.071	3.270	1.236
66	Talbot	6	507	-5.091	1.307	0.630
93	Lada	5	3490	-5.082	0.877	0.905
94	Honda	9	3823	-5.070	0.284	1.290
96	Toyota	16	4034	-5.083	0.927	0.862
97	Nissan	14	3653	-5.079	0.733	1.003
98	Mazda	21	8069	-5.078	0.682	1.037
$\hat{\beta} =$				-5.870	1.228	0.687

Os resultados do quadro 6.6 permitem múltiplas leituras, quer em termos de comparação entre os resultados obtidos com as duas modelizações, quer na interpretação dos resultados dentro do modelo hierárquico. Dada a finalidade do estudo, Sundt apenas apresenta uma selecção de 25 modelos cobrindo a maioria das marcas.

Em termos comparativos, saliente-se que se obtêm resultados muito semelhantes na carteira estudada independentemente de se utilizar ou não o modelo hierárquico. Nos 25 casos apresentados a diferença absoluta média que se obtém nas estimativas de credibilidade para o prémio puro de risco não ultrapassa 6% do valor médio de \tilde{m}_{nk} . Parece assim não se justificar, em termos meramente práticos, o recurso ao modelo hierárquico numa carteira semelhante a esta.

A análise dos diferentes resultados dentro do modelo hierárquico permite no entanto tirar algumas conclusões sobre o comportamento dos diferentes modelos face ao que seria de esperar em função do colectivo e da marca. Para não alongar este capítulo em demasia apenas se focam dois casos paradigmáticos:

BMW 320i - Este modelo apresenta uma propensão à sinistralidade muito superior ao que seria de esperar em termos médios mas, no entanto, tem um comportamento melhor do que seria previsível se se considerassem apenas os veículos da marca BMW.

Opel - No caso desta marca - modelos Corsa, Kadett e Rekord - existe uma avaliação em função do colectivo mais penalizante do que aquela que é feita em termos da marca o que sugere uma marca mais segura do que a média, em circunstâncias idênticas claro está, apresentando os diferentes modelos comportamentos mais contrastados dentro da marca.

A maior limitação ao uso desta metodologia reside no facto de ser necessário efectuar uma recolha bastante exaustiva de características, nomeadamente em termos de marca e modelo dos diferentes veículos. Caso se disponha destes elementos os resultados obtidos sugerem que se proceda a uma análise deste tipo nem que seja para complementar uma abordagem mais tradicional.

Quadro 6.6 - Os principais resultados

Marca	Modelo	Pot.	Preço/ peso	obs.	Y_{nk}	Não hierárq.		Hierárquico		
						μ_r	m_r	μ_{1r}	μ_{2r}	m_r
14	BMW 320i	125	147.1	173	3.336	2.610	2.775	2.495	4.042	3.891
15	Visa GT	80	95.4	35	0.502	1.533	1.447	1.587	2.066	1.944
16	Panda 45	45	72.2	179	2.283	0.866	1.585	0.998	1.010	1.632
17	Escort 1.6 L	79	99.5	738	1.465	1.561	1.497	1.603	1.629	1.522
18	Sierra 2.0	105	93.2	77	5.628	1.820	2.452	1.88	2.152	2.693
18	Sierra 1.6	75	99.3	19	0.147	1.510	1.426	1.553	1.613	1.529
25	Mercedes 190E	122	181.4	185	2.075	2.919	2.709	2.694	2.517	2.413
31	Corsa 1.2 ST Sd	55	86.8	144	0.844	1.136	1.032	1.221	1.193	1.075
31	Kadett 1.2 S C	60	83.5	269	1.135	1.165	1.151	1.260	1.146	1.141
31	Rekord 2.0 S	100	103.8	2879	1.644	1.864	1.676	1.890	1.441	1.612
33	305 GLS	74	94.7	249	0.954	1.451	1.250	1.508	1.332	1.186
33	505 break	100	113.2	50	3.043	1.959	2.073	1.955	1.576	1.721
39	Skoda 120 GLS	58	55.6	74	1.301	0.860	0.956	1.044	1.086	1.130
45	Santana 1.9 GX	115	126.2	17	0.904	2.276	2.591	2.229	2.497	2.782
46	240 GLT B23A	129	134.5	21	1.556	2.533	2.500	2.458	1.408	1.413
46	240 GLE B23	129	137.2	10	0.000	2.560	2.519	2.477	1.466	1.444
53	1600 GL Swb	71	84.5	48	1.307	1.312	1.311	1.402	1.43	1.417
54	Galant 1600 GL	75	93.8	206	1.230	1.455	1.363	1.515	1.354	1.306
93	Lada 1600 S	78	52.5	716	1.133	1.076	1.112	1.268	1.108	1.124
94	Prelude EX	106	184.2	36	3.046	2.748	2.774	2.517	2.625	2.660
96	Carina Coupe	75	88.7	321	1.811	1.403	1.594	1.480	1.409	1.590
97	Stanza 1.6 GL	81	96.7	49	0.862	1.558	1.478	1.609	1.513	1.443
97	Bluebird 1.8 GL	88	94.2	327	1.749	1.619	1.680	1.677	1.539	1.634
98	626 1.6 GLX S	81	90.7	153	1.243	1.498	1.422	1.567	1.442	1.385
98	929 2.0 DX SW	90	90.3	350	1.186	1.605	1.407	1.675	1.499	1.357

Para melhor especificação das marcas veja-se o quadro 6.5.

Capítulo 7

Base de Dados

A análise do caso português que se irá desenvolver nos próximos capítulos teve por base o estudo da carteira de uma das maiores seguradoras nacionais, a Bonança E.P., que facultou os elementos necessários ao desenvolvimento do estudo.

Muito embora o processo mais adequado fosse o estudo de várias carteiras significativas, por forma a filtrar distorções que possam ter origem na política comercial ou no tipo de implantação predominante em cada companhia, o facto de se trabalhar com uma carteira importante, com uma distribuição regional relativamente equilibrada pelos maiores centros urbanos, pese embora um maior peso relativo da zona sul com particular evidência para os distritos de Lisboa e Setúbal, permitirá certamente generalizar, embora com algumas cautelas, os principais resultados obtidos.

O objectivo principal do presente capítulo consiste na apresentação dos dados a que se teve acesso e das transformações que neles se operaram para construir os diferentes ficheiros de trabalho.

Em termos metodológicos seria talvez mais correcto, teoricamente pelo menos, definir em primeiro lugar o período a estudar e só após a definição das necessidades envolvidas por esta escolha preliminar avançar para a especificação dos dados necessários. Não se seguiu tal via porque a informação possível apresentava desde logo sérias limitações quer em termos dos anos para os quais existia informação

desagregada quer nas variáveis registadas em suporte magnético tendo-se assim optado por recolher todos os elementos existentes.

Esta ligação entre dados disponíveis e necessidades de informação não constitui excepção e espera-se que, uma vez realçadas as potencialidades da informação existente bem como as suas limitações, se possa caminhar para uma recolha mais sistemática e mais alargada.

Optou-se assim por referir, na secção 1, os dados tal como foram facultados pela companhia, para se poder discutir na secção 2 a problemática inerente à escolha de um período temporal para o estudo a desenvolver. A razão de se proceder desta forma reside essencialmente, como se disse, nas limitações existentes nos dados disponíveis, sendo necessário na escolha do período a analisar ter em conta estas restrições. Na secção 3 apresenta-se de forma muito breve os tratamentos preliminares que se fizeram, bem como algumas codificações introduzidas. Por fim na secção 4 refere-se o conteúdo dos diferentes ficheiros de trabalho que se construíram, sublinhando-se as limitações mais importantes de que os dados enfermam.

1. A organização dos dados iniciais

Os dados que foram fornecidos pela seguradora estavam organizados, como seria de esperar, em termos das necessidades de funcionamento da companhia e consistiam em três ficheiros base.

Produção O primeiro ficheiro corresponde à carteira e recolhe diversas informações referentes a cada apólice. Trata-se de um ficheiro dinâmico onde se registam as alterações que vão surgindo ao longo do tempo. De entre as características registadas, teve-se acesso aos elementos seguintes:

- nº de apólice (codificado).
- natureza do segurado (empresa ou particular). Só se registam como empresas aquelas que possuem 10 ou mais veículos seguros na companhia.

- concelho de residência do segurado.
- ano de nascimento do segurado (informação omissa em muitos registos).
- há quantos anos o segurado obteve a carta (até 1 ano, de 1 a 2 anos, mais de 2 anos).
- marca e modelo do veículo (campo alfanumérico preenchido de forma muito incompleta na grande maioria dos casos).
- ano de fabrico.
- categoria do veículo (de acordo com as categorias definidas por lei ¹). Neste trabalho apenas se abordarão os veículos ligeiros de passageiros que correspondem à classe 1.
- classe de cilindrada (até 1500 cm³, de 1501 até 2500 e mais de 2500 para os veículos ligeiros).
- capital seguro em Responsabilidade Civil.
- capital seguro em Danos Próprios excluindo roubo.
- capital seguro em Danos Próprios para roubo.
- existe ou não cobertura de acessórios.
- franquia existente.
- Desconto ou agravamento existentes no prémio a pagar. Este campo, contém a situação na última renovação e traduz a posição da apólice na escala de bonus em vigor.
- ano de início da apólice.
- apólice ainda em vigor ou que apenas se mantém na carteira por corresponder a um sinistro que ainda não está encerrado.

¹Veja-se a publicação *Tarifa de Veículos* editada pela Associação Portuguesa de Seguradores em 1987.

- Número de sinistros participados desde 1982 (inclusive).

Em termos temporais, observou-se a situação em vigor neste ficheiro em três momentos distintos, 31 de dezembro de 1986, 1987 e 1988. Assinale-se que, para 1988, também se pôde observar 3 características adicionais:

- Número de anuidades consecutivas sem sinistros participados.
- Número de sinistros participados até à data, na anuidade em curso.
- Mês e dia onde se procede à renovação da apólice.

Os sinistros O segundo tipo de ficheiros corresponde aos sinistros participados à seguradora. Cada participação origina a criação de um processo onde se registam os elementos considerados mais significativos. Estes ficheiros têm duração anual, transitando os processos ainda não encerrados para o ficheiro referente ao ano seguinte. À semelhança dos ficheiros de carteira, examinaram-se os ficheiros de sinistros referentes a 1986, 1987 e 1988. Os elementos observados foram os seguintes:

- nº de apólice (codificado por forma a permitir cruzar a informação com os outros ficheiros, nomeadamente com o ficheiro de produção).
- nº de processo.
- data do acidente (dia, mês e ano).
- ano de abertura do processo.
- área de subordinação (corresponde à delegação onde a participação deu entrada).
- capital seguro em Responsabilidade Civil no momento do acidente.
- capital seguro em Danos Próprios no momento do acidente.

- existia ou não cobertura de Danos Próprios para os riscos 3 e 4 isto é colisão, capotamento e incêndio.
- existia ou não cobertura de Danos Próprios para o risco 5 (roubo).
- classe da viatura que sofreu o acidente.
- natureza do risco (danos materiais ou danos corporais).
- o segurado declarou-se ou não como culpado.
- montante presumível das indemnizações (apurado por média e não caso a caso). Refira-se que quando se encerra o processo este campo é posto a 0.

Os pagamentos O terceiro e último tipo de ficheiro corresponde aos pagamentos efectuados pela seguradora. Estes ficheiros têm um processo de actualização semelhante aos de sinistros, transitando agora todos os registos de pagamentos referentes aos processos em aberto. Uma vez mais observaram-se os ficheiros referentes aos anos de 1986, 1987 e 1988. Como campos deste ficheiro assinalam-se:

- nº de apólice (ver casos anteriores).
- nº de processo (permite identificar o registo no ficheiro de sinistros).
- valor pago.
- código referente ao tipo de pagamento. Este código permite caracterizar cada pagamento em função de duas características independentes, sendo a primeira referente à causa que motivou a indemnização enquanto a segunda aponta para a natureza jurídica do pagamento (ver quadro 7.3).
- código referente ao risco a que se refere o pagamento (ver quadro 7.2).
- data do pagamento (mês e ano).

Quadro 7.1 - Tipo de Pagamentos

Indemnização	Forma de decisão
oficinas	Acordo entre as partes
hospitalizações	Decisão tribunal cível
honorários clínicos	Decisão tribunal criminal
paralizações	Decisão tribunal polícia
diversos	Decisão tribunal menores
_____	Decisão tribunal da relação
liquidação e avaliação	Decisão supremo tribunal
Informações e liquidações	

Quadro 7.2 - Tipo de Riscos

Danos Materiais		Danos Corporais
Resp. Civil (RC) ou Danos Próprios (DP)		sempre Resp. Civil
RC	Resp. Civil	Condutor
	Colisão, Capotamento ...	Passag. Transp. colect.
	Incêndio	Passag. Taxi ou letra A
DP	Roubo viatura	Passag. carro aluguer s/ cond.
	Roubo acessórios	Passag. transp. gratuitamente
		Peão
		Cond. bicicleta motorizada

Para além destas características também se distingue nos danos materiais entre reparações e perda total enquanto nos danos corporais é possível separar feridos ligeiros, feridos graves e mortos. Os sinistros codificados no ficheiro de sinistro como danos corporais podem também incluir pagamentos referentes a danos materiais, não sendo verdadeira a situação inversa.

Algumas observações Como se vê pelos elementos referenciados, existe por um lado a preocupação de registar os elementos que permitam informatizar o normal funcionamento da companhia e vigoram por outro lado cuidados redobrados com a natureza dos pagamentos feitos a título de indemnização.

De facto, no ficheiro de carteira, existe um registo dos elementos necessários ao cálculo automatizado do prémio o que é particularmente evidente se se atender ao facto dos elementos em falta corresponderem a características sem impacto no estabelecer do prémio. Por exemplo a variável *idade do segurado* encontra-se omissa em muitos registos mas corresponde sempre a segurados com mais de 25 anos, não tendo assim qualquer efeito no estabelecimento dos prémios devidos. Numa situação onde se procure não só criticar a tarifa em vigor como também avançar alternativas concretas já estas omissões serão bastante mais problemáticas.

A maior limitação no que se refere às características do veículo residirá, sem qualquer dúvida, no facto do campo referente à marca e modelo do veículo ser *livre*, isto é não estar nem codificado nem existir uma validação dos dados introduzidos por forma a obrigar a uma descrição efectiva do veículo ². Este facto impede que se possa ter uma descrição exaustiva de todas as possíveis variáveis significativas que se referem às características técnicas do veículo, mesmo que se construísse uma base de dados que relacionasse cada modelo com todos os elementos que se pensa poderem assumir papel de relevo na explicação da sinistralidade. Refira-se no entanto que tal tarefa não deixaria de ser bastante morosa uma vez que se teriam de abordar centenas de casos diferentes.

Em termos do segurado, a maior lacuna reside no não registo da profissão deste uma vez que esta variável não só se mostra significativa em muitos estudos como também é tida em conta em diversas tarifas europeias. Para além desta falta, refira-se também as limitações que vão ter origem no facto de existirem muitos registos para os quais parte da informação se encontra omissa. Nesta situação se encontram elementos como a idade do segurado, o ano de obtenção da carta de condução para não falar do facto de apenas se registarem como empresas aquelas que possuem 10 ou mais apólices na carteira.

²Em mais de 50% dos registos apenas se depreende com clareza a marca dos veículos.

Quadro 7.3 - Sinistros de 86 avaliados em fins de 88 (em %)

	sinistros proc. encerrados	pagamentos já feitos face às estimativas ¹	
		dados globais ²	proc. encer.
Danos Materiais	94.36	22.91	38.78
Danos Corporais	60.13	20.88	50.17
Total R.C.	89.45	21.48	46.78

¹ As estimativas são construídas somando os pagamentos feitos com as provisões estimadas.

² Inclui todos os sinistros participados independentemente de estarem ou não encerrados.

No que se refere à sinistralidade a preocupação maior residiu na separação dos sinistros em termos dos danos originados (este elemento é logo registado no ficheiro de sinistralidade), sendo de lamentar que não tenha existido idêntica preocupação em separar os casos de responsabilidade civil dos que apenas incluem danos próprios. Esta discriminação apenas se pode fazer com segurança quando se encerra o processo uma vez que os registos de pagamentos incluem uma informação muito detalhada que permite uma caracterização bastante completa de cada caso.

A principal limitação a este nível advém do facto de muitos sinistros necessitarem de vários anos para serem encerrados o que, tendo também presente que as estimativas são feitas por valores médios previsionais ³, dificulta o determinar dos custos associados a cada sinistros.

Para ilustrar esta situação, considerem-se os sinistros ocorridos no ano de 1986. O quadro 7.3 permite avaliar a morosidade de muitos processos ao sublinhar que, mais de dois anos volvidos sobre estes sinistros (a informação disponível regista os pagamentos feitos nos anos de 1986, 87 e 88), mais de 10% dos casos ainda não estavam fechados, o que correspondia a um peso dos pagamentos já feitos sobre o total das indemnizações incluindo estimativas de mais de 50% o que sublinha bem que os processos mais morosos são bastante mais pesados do que a média.

³ Existem algumas excepções para os casos mais preocupantes.

Uma análise tendo em conta a natureza dos danos envolvidos sublinha, como seria de esperar, um maior atraso nos sinistros onde se registaram danos corporais, quer se trabalhe em frequência quer em custos.

Para além deste problema também existem alguns casos, embora em número bastante menor, para os quais não se tem a certeza se correspondem ou não a sinistros envolvendo responsabilidade civil, uma vez que não se encontram ainda encerrados e que não envolveram até à data nenhum pagamento atribuível a este tipo de risco (tratando-se, como é evidente, de apólices que tenham cobertura de danos próprios para além de se tratar de sinistros que não envolvem danos corporais).

2. Escolha do período a estudar

Tendo por objectivo estudar os factores que influenciam as diferenças de comportamento dos segurados perante a sinistralidade, isto é estabelecer critérios que permitam distinguir as diferentes propensões ao sinistro das várias apólices, o período de observação deverá respeitar alguns critérios, nomeadamente:

1. Ser de idêntica duração para todas as apólices. Admitindo-se algumas hipóteses sobre o processo de risco subjacente à sinistralidade, poder-se-á levantar esta restrição. Um caso particular de tal situação a que se irá recorrer no presente trabalho vai consistir nos processos de Poisson cuja *divisibilidade* vai permitir considerar períodos incompletos, tendo-se no entanto de conhecer com exactidão a sua duração.
2. Permitir uma avaliação correcta da situação das apólices durante todo o período de observação no que diz respeito às características dos veículos e dos segurados, nomeadamente no que se prende com a posição destes na escala de bonus/malus.
3. Ser, tanto quanto possível, o mesmo já que a taxa média de sinistralidade sofre por vezes variações significativas de ano para ano. No caso de se

abranger apólices em períodos diferentes, seria necessário verificar a amplitude destas variações para, no caso de serem significativas, proceder a uma filtragem dos dados.

4. Conseguir identificar as novas apólices e os segurados que estejam no seu primeiro ou segundo ano com carta de condução. Torna-se importante abranger o maior número de apólices nestas circunstâncias já que este sub-grupo será, por natureza, bastante restrito.
5. Na análise dos custos deve-se procurar um período suficientemente afastado por forma a que os sinistros estejam encerrados, ou pelo menos para que os custos que estes envolvem possam ser estimados com uma margem de erro bastante reduzida, mas não tão afastados que se tenham verificado alterações significativas no comportamento dos automobilistas (introdução de normas de segurança novas, alterações significativas na densidade de circulação, ...).

Se por um lado os dados disponíveis obrigam à análise de um período posterior a dezembro de 1986, ou seja vão limitar de forma drástica, senão mesmo inviabilizar uma análise em função dos custos associados às indemnizações pagas (vejam-se os comentários feitos ao quadro 7.3), problema que será discutido de forma mais aprofundada no capítulo 9, existem por outro lado diversas soluções alternativas para responder aos outros quesitos já que, em nenhum caso, se consegue preencher as diferentes características que foram apontadas.

Nas duas sub-secções seguintes, discutir-se-ão as soluções que parecem mais adequadas, para, na sub-secção 2.3, tirar algumas conclusões.

2.1. Escolha de um ano de calendário fixo

Esta opção traduz-se por seleccionar o mesmo período para todas as apólices, o que responde ao primeiro e ao terceiro dos objectivos enunciados. Para procurar responder ao segundo objectivo devem eliminar-se as apólices que tenham sofrido alterações nos elementos referentes ao veículo ou ao concelho de residência do segurado no decorrer do período em estudo. Feito isto, e desprezando os casos

muito pouco prováveis de dupla troca de veículo no mesmo ano com o último veículo idêntico ao inicial, resta analisar a situação referente ao bonus/malus e ao quarto objectivo.

Como é sabido, o bonus/malus só é activado, para efeitos de tarifa, no fim do período de vigência da apólice, e portanto ao escolher um ano fixo, as situações iniciais para as diferentes apólices serão distintas; para umas o bonus/malus constante no ficheiro de carteira corresponde a uma avaliação mais ou menos adequada (quando a renovação teve lugar nos últimos meses do ano), enquanto para outras pode tratar-se de uma situação perfeitamente desajustada.

Como só se dispõe da data de renovação (dia e mês) no ficheiro de 1988, foi necessário admitir que estes elementos não sofreram alterações em relação aos anos anteriores, podendo-se então redefinir as diferentes situações no sistema de bonus com base numa data comum a toda a carteira. No caso de se estudar o ano de 1987, ter-se-ia ainda de ponderar os casos que correspondem a apólices que não se mantiveram em vigor em 1988, situação que impossibilita o conhecimento da data de renovação.

Por último, o quarto objectivo só é conseguido de forma muito parcial já que se consideram, por exemplo, condutores no primeiro ano de carta aqueles que não tenham completado um ano no fecho anterior, isto é o período da obtenção da carta até um ano é transformado num período até dois anos (exclusivé) na pior situação, sucedendo algo de semelhante ao período de um a dois anos.

No caso de se admitir que a data de renovação não se alterou (dia e mês) - ou então considerando apenas 1988- é possível abranger no estudo apólices cujos segurados ainda não tenham completado 1 ano de carta, ponderando-se esta situação, como é natural, pelo período efectivo de exposição ao risco.

2.2. Escolha do último ano de vigência de cada apólice

Esta solução consiste em observar o último ano completo de vigência para cada apólice, independentemente do período concreto que se está a cobrir. A implementação de uma solução deste tipo pressupõe o conhecimento das datas de reno-

vação das diferentes apólices, informação que obriga a recorrer à hipótese feita no ponto anterior.

Neste caso a determinação da posição correcta na escala de bonus/malus no início do último ano pressupõe o conhecimento da situação estática imediatamente posterior a esta renovação, sendo necessário conhecer, no caso geral, duas outras situações para verificar a permanência das características dos veículos já que as informações de que se dispõem correspondem às situações concretas no fecho dos ficheiros.

Uma solução deste tipo responde claramente ao primeiro e quarto objectivos, permite, nas condições anteriormente analisadas, cobrir o segundo mas apresenta sérias limitações no que toca ao terceiro objectivo. De facto o período concreto que se vai cobrir vai corresponder a dois anos, podendo ser quase disjunto para duas apólices que se vão comparar. Esta abordagem pressupõe então que se escolha anos com frequências médias de sinistralidade semelhantes ou que se admita a independência entre os períodos concretos de análise e as diferentes características das apólices.

2.3. A escolha entre alternativas

Tendo em conta que nenhuma das soluções propostas responde à totalidade dos requisitos que se definiram, torna-se necessário ponderar as razões que podem fundamentar uma opção.

Seleccção dos ficheiros de carteira - Enquanto a primeira alternativa é de fácil implementação, podendo-se também incluir as apólices que tenham entrado na carteira no decorrer do ano que se está a analisar, e permite que se construam ficheiros para os anos de 1987 e 1988, já o processo é um pouco mais complicado para a segunda alternativa.

De facto, observaram-se as apólices em três momentos distintos, 31 de dezembro de 1986, 1987 e 1988. Como a última renovação teve lugar no decorrer de

1988, seleccionar-se-ia um período compreendido entre “meados” de 1987 e “meados” de 1988. Para garantir que não se verificaram alterações nas características directamente mensuráveis, nomeadamente que não houve troca de veículo, ter - se-ia de verificar que estes elementos não sofreram alterações entre o ficheiro de 1986 e o de 1988 (observando-se também 1987 para evitar fenómenos de dupla troca), rejeitando-se todas as apólices para as quais se verificou uma alteração nestas características entre final de 1986 e final de 1988.

Claro está que, à semelhança do que se pode fazer na outra alternativa, também se poderia relaxar um pouco a rigidez do procedimento por forma a incluir as apólices que entraram na carteira no decorrer de 1988.

De qualquer forma, no âmbito desta solução, apenas se poderá construir um ficheiro que, em termos da carteira globalmente considerada, cobrirá um período de quase dois anos.

Homogeneidade no tempo - O facto de uma opção pela selecção do último ano de vigência de cada apólice obrigar a construir uma carteira que, em termos reais, cobre um período de dois anos leva à necessidade de se admitir a homogeneidade no tempo do processo gerador dos sinistros, hipótese que se poderá avaliar pela evolução das taxas (ou frequências) médias de sinistralidade. No caso de optar por uma escolha em termos de anos civis, tal hipótese perde importância, muito embora se deva admitir a permanência dos comportamentos relativos que uma alteração muito pronunciada na sinistralidade média poderá pôr em causa.

Avaliação da situação referente ao sistema de bonus - Este aspecto constitui o ponto mais forte de uma opção pela segunda alternativa uma vez que ela permite avaliar correctamente esta característica enquanto a outra solução leva sempre, como já se viu, à necessidade de considerar situações aproximadas, ou pela simples generalização da situação na renovação anterior ao início do período em análise, ou pela geração de um período de acerto entre a renovação e o final do ano anterior a este período.

A opção pela primeira alternativa - Ponderando os elementos que se acabaram de expor, pareceu mais aconselhável recorrer à primeira alternativa, tendo em conta a estrutura dos dados disponíveis.

Esta metodologia tem por fim seleccionar carteiras com base num ano civil, incluindo-se também as apólices que tenham entrado na carteira no decorrer do ano escolhido. Para diferenciar estes casos, indica-se o número de dias que cada apólice permaneceu na carteira. No caso das apólices que tenham permanecido durante todo o ano, apenas se seleccionam aquelas cujas características referentes ao veículo e ao segurado sejam idênticas nos dois ficheiros de carteira que limitam o período seleccionado.

3. Os tratamentos preliminares

Antes de proceder à elaboração do sistema de tarifas, tornou-se necessário construir, a partir do conjunto de ficheiros disponíveis, uma base de dados homogénea. Também se procurou codificar o campo referente à marca e ao modelo dos diferentes veículos bem como codificar alguns elementos mais relevantes.

Nesta secção apresentar-se-ão de forma muito sintética três aspectos, a saber o tratamento da sinistralidade em termos dos ficheiros de sinistros e pagamentos, a codificação das marcas dos veículos e a definição da carteira a analisar.

3.1. Tratamento da sinistralidade

Procurou-se definir a natureza exacta de cada sinistro, nomeadamente se envolvia responsabilidade civil, bem como avaliar os custos que lhe são inerentes. Este tratamento é efectuado em duas fases, sendo a primeira destas fases constituída por dois processos que podem correr em paralelo.

Fase 1 - Nesta etapa procedeu-se ao tratamento autónomo de sinistros e indemnizações criando as condições necessárias para proceder à fusão dos diferentes elementos.

Pagamentos - Eliminaram-se os pagamentos referentes a sinistros ocorridos antes de 1 de janeiro de 1987, e procedeu-se em cada um dos ficheiros anuais ao cumular dos pagamento referentes ao mesmo sinistro tendo-se o cuidado de discriminar, em função da codificação muito pormenorizada que existe nestes ficheiros, entre 4 tipos diferentes de pagamentos:

- Danos Corporais (R.C.).
- Danos Materiais (R.C.).
- Danos Próprios (excluindo roubo).
- Roubo.

Guardam-se, como é óbvio, os elementos que vão servir para relacionar os pagamentos com os sinistros.

Sinistros - Depois de ordenar os sinistros ocorridos após 1986 em cada um dos ficheiros procede-se à construção de um único ficheiro de sinistros por fusão dos diversos ficheiros anuais.

Fase 2 - Procede-se à fusão entre sinistros e pagamentos agregando a cada sinistro constando no ficheiro de sinistralidade os pagamentos feitos em cada uma das categorias seleccionadas.

3.2. Codificação das marcas

Na codificação do campo referente à marca e modelo dos veículos não foi possível ir tão longe quanto seria desejável já que, sendo o seu preenchimento feito sem verificação, cerca de dois terços dos registos não contêm uma identificação clara do modelo do veículo. Só foi assim possível codificar as marcas com todas as limitações inerentes já que, com base nesta informação, não se torna possível introduzir mais características técnicas respeitantes aos veículos, ficando-se assim dependente dos elementos existentes no ficheiro de carteira.

Numa primeira etapa, obteve-se uma listagem dos diferentes conteúdos do campo respeitante à marca e modelo dos veículos no ficheiro de 1987 para as

apólices em vigor referentes a automóveis ligeiros. Nesta listagem, eliminaram-se todos os caracteres que não letras e algarismos para obviar a erros na introdução destes elementos. Também se assinalou a frequência absoluta de cada ocorrência para se avaliar da importância de cada caso.

Numa segunda etapa, codificou-se cada um dos registos do ficheiro anteriormente obtido. Uma vez realizada a impossibilidade de identificar os modelos dos veículos ⁴, optou-se por associar as primeiras letras de cada registo com a marca destes, podendo sintetizar-se este processo em duas fases:

- Construção de um ficheiro onde se atribui um código numérico a cada marca, convencionando-se o valor 0 para casos mal classificados.
- Construção de um ficheiro de transformação com 3 campos por registo, sendo o primeiro referente ao código da marca, o segundo à dimensão da chave e o terceiro representando a chave, isto é o conjunto de caracteres que permite identificar cada marca.

O ponto fulcral deste processo reside na elaboração deste último ficheiro que resulta do estudo da lista obtida na primeira etapa. Em termos práticos, recorreu-se a um método iterativo na elaboração destes ficheiros já que a dimensão do ficheiro inicial de nomes com mais de 5000 registos não permitia um tratamento directo.

Posteriormente à codificação das marcas presentes no ficheiro de carteira de 1987, completou-se o processo para 1988.

3.3. A selecção da carteira

Optou-se, como já se disse, por seleccionar uma sub-carteira composta pelas apólices em vigor referentes a veículos ligeiros particulares. Não se incluíram os

⁴Cerca de 90000 registos apenas referiam a marca dos automóveis sem apontarem nenhum modelo.



taxis e os veículos de letra A por apresentarem algumas características que tornam discutível a sua modelização através de variáveis semelhantes às dos veículos referidos, nomeadamente as características do segurado serem as do proprietário do veículo e não do seu condutor habitual.

Por outro lado ir-se-á estudar as carteiras referentes aos anos de 1987 e 88, incluindo-se na análise as apólices que tenham entrado em vigor nos referidos anos, indicando-se em cada caso o período de exposição ao risco que se deve considerar, já que numa abordagem pelas frequência de sinistralidade com base num processo de Poisson poder-se-á utilizar a *divisibilidade* destes processos por forma a abranger períodos de duração diferentes.

Também se procurou reconstruir, com a maior fidelidade possível, o historial de cada apólice em termos dos sinistros participados desde 1982 inclusivé, ou desde a entrada em vigor da apólice, caso tenha acontecido posteriormente.

3.3.1. Ano de 1987

Para tal estabeleceu-se como ano base 1987 definindo-se, com base em toda a informação disponível, um ficheiro de carteira tão completo quanto possível.

Renovação Por forma a incluir a data de renovação, cruzou-se a informação com o ficheiro de carteira de 1988, admitindo-se que, para as apólices que se mantenham na carteira, as renovações ocorreram sempre no mês e dia referidos em 1988, e para os restantes casos assinalou-se a ausência de informação.

Exposição ao risco Efectuou-se uma partição das apólices presentes, distinguindo-se três situações:

- apólice nova, isto é que não consta na carteira de 1986.
- apólice para a qual as características técnicas do veículo ou os elementos referentes ao segurado sofreram alterações entre 1986 e 1987.

- apólice que não sofreu alterações entre 1986 e 1987, no que concerne aos elementos referenciados.

Sinistros Com vista ao estudo do sistema de bonus (capítulo 10), desagregou-se o campo referente ao número de participações feitas desde 1982 por forma a especificar toda a informação existente sobre a sinistralidade passada da apólice. Tendo em conta a informação disponível, consideraram-se os sinistros ocorridos nos períodos seguintes:

- de 1 de janeiro de 1982 até à renovação de 1984.
- da renovação de 1984 e final de 1985.
- em 1986.
- em 1987.

Como é evidente, no caso das apólices que entraram na carteira depois de 1982, apenas se registou a informação existente. Para além destes elementos, também se guardou a informação respeitante aos sinistros participados em 1986, antes da renovação daquele ano, e em 1987 posteriormente àquela renovação.

3.3.2. Ano de 1988

Para o ano de 1988, tratou-se de forma semelhante a exposição ao risco, agora entre 1987 e 1988, aproveitando-se a desagregação feita para os sinistros passados. Neste campo acrescentou-se informação respeitante aos sinistros participados em 1988 na sua globalidade bem como aqueles que tiveram lugar entre o início do ano e a renovação, à semelhança do que foi feito para 1987.

Capítulo 8

Análise em Termos Marginais

Este capítulo constitui uma primeira análise das duas carteiras em estudo, que se referem a veículos ligeiros de passageiros para os anos de 1987 e 1988. Esta abordagem em termos marginais tem por objectivo obter uma caracterização mais pormenorizada da carteira em termos dos diferentes factores que se observaram para além, claro está, de permitir avaliar os impactos destes factores, quando individualmente considerados, na propensão à sinistralidade.

Tal abordagem não deverá ser utilizada directamente na construção de tarifas uma vez que não toma em consideração as inter-relações que inevitavelmente existem entre os diferentes factores. O seu interesse residirá essencialmente, como já se disse, numa melhor compreensão quer das características da carteira quer da influência dos factores observados na sinistralidade.

Tenha-se também presente que a forma de avaliar a sinistralidade em Responsabilidade Civil não é problema pacífico, sendo discutida na secção 1, muito embora tal discussão ultrapasse em muito a informação disponível. Não se quis no entanto deixar de apresentar algumas metodologias mais ambiciosas uma vez que se espera que a qualidade e quantidade dos dados registados possa permitir, num prazo não muito longínquo, proceder a uma análise mais pormenorizada.

Por seu turno, a secção 2 descreve muito rapidamente os ficheiros de trabalho, construídos em consequência da discussão desenvolvida no capítulo anterior, para

se apresentarem os resultados mais significativos desta abordagem na secção 3 onde também se analisam os problemas inerentes à construção de uma variável de índole regional.

1. Como avaliar a sinistralidade em R.C.

Em termos dos principais estudos publicados, existem basicamente duas formas de avaliar a sinistralidade originada pelas diferentes apólices: em termos do número de sinistros provocados ou em termos do montante de indemnizações que envolveram.

Se bem que uma abordagem em termos de custos tenha a inegável vantagem de focar o aspecto que mais directamente interessa às companhias seguradoras, o prémio de risco, existem no entanto alguns pontos que merecem apreciação mais cuidada:

- Peso de eventuais provisões nos custos estimados. Este problema assumirá um importância bastante variável em função da metodologia que suportou o cálculo das provisões, nomeadamente se estas foram calculadas caso a caso ou por estimativa média, e do peso que as provisões assumem face aos pagamentos já feitos; Este último aspecto depende, em boa parte, da distância que separa o momento onde se procede à análise do período que se está a estudar, para além, claro está, de uma maior ou menor celeridade no sistema de pagamento de indemnizações.
- Presença de sinistros de gravidade extrema. Se nas células muito populosas tais situações serão, na maioria dos casos, filtradas pelo grande número de apólices presentes já a ocorrência de casos extremos em células mais pequenas poderá originar distorções bastante grandes nas conclusões a tirar. Para obviar a situações deste tipo parece razoável recorrer a uma filtragem dos dados, sendo o método mais conhecido baseado em *Bühlmann & Jewell* [1982] e consistindo em considerar que acima de certo limite os sinistros não devem ser afectados a nenhum grupo particular mas sim considerados como estando

baseados no acaso. Em termos práticos tal princípio traduz-se por estabelecer um limite máximo para os custos, atribuindo-se este máximo para os sinistros que ultrapassem o limite fixado, processo este cujas semelhanças com os mecanismos de um resseguro de tipo "excess of loss" são evidentes, podendo-se até, no caso de vigorar esta forma de resseguro, utilizar o limite negociado para este fim como valor máximo a considerar.

Como é evidente, podem construir-se outros métodos de filtragem, aplicando-se nomeadamente um factor multiplicativo que será decrescente à medida que os custos aumentam. Uma situação deste tipo mais não será do que uma generalização do caso anterior.

- Efeitos externos à sinistralidade. Tais efeitos têm sobretudo origem no sistema fiscal que, sendo externo ao problema que se está a analisar, poderá no entanto influir nos resultados quer por alterações das taxas fiscais entre dois períodos quer pela estrutura destas mesmas taxas que penalizam de forma diferentes as várias componentes das indemnizações. O sistema do IVA constitui um exemplo deste tipo de estrutura fiscal que deverá merecer cuidados adicionais conforme o tipo de conclusões que se queiram tirar. As soluções poderão ir da não introdução de filtragens adicionais, pressupondo-se então uma estrutura fiscal constante do período de observação ao momento de aplicação da tarifa, até à solução extrema de se considerarem valores líquidos, isto é filtrando-se a componente fiscal e procedendo a sua reintrodução numa fase posterior.
- Por fim, também existem muitas vezes dificuldades em separar de forma clara os custos entre a parte atribuível à Responsabilidade Civil e aquela que apenas diz respeito a Danos Próprios quando se trata de uma apólice que cobre estes dois vértices.

A segunda alternativa que se oferece consiste em considerar-se apenas o número de sinistros e baseia-se ou numa situação mais limitada (não se dispõe de informação com credibilidade suficiente sobre os custos) ou na admissão da exis-

tência de independência entre o custo médio dos sinistros e o número de sinistros participados.

Se tal hipótese parece em termos teóricos um pouco discutível ¹, já em termos estatísticos diversos autores verificaram tal independência nas carteiras que estudaram.

Por outro lado *Prins* [1982] salienta que existe um grau de aleatoridade adicional na determinação dos custos de um sinistro, defendendo que se privilegie a frequência de sinistralidade. Uma reflexão sobre o processo inerente à determinação do montante de indemnizações a pagar a determinada apólice, leva a considerar um processo composto do tipo

$$S = \sum_{n=0}^{M_n} Y_n$$

onde S representa as indemnizações a pagar, M_n o número de participações e Y_n os custos inerentes ao n -ésimo sinistro, pretendendo-se avaliar $E(S)$. Torna-se assim claro que, caso a independência entre custo médio e frequência seja admissível, será bastante mais adequado atacar o problema com base no número de participações.

No entanto é importante sublinhar a ideia expressa em *Gregorius* [1982] onde se defende que os factores que influenciam a frequência de sinistralidade possam não ser os mesmos do que os que pesam na determinação dos montantes associados aos sinistros. Um bom exemplo destes comportamentos diferentes pode situar-se no trânsito urbano face ao rural tendendo o primeiro a aumentar o número de sinistros mas desempenhando eventualmente papel contrário no montantes destes uma vez que a velocidade de circulação é bastante menor.

Num caso como aquele que se está a estudar, a avaliação pelos custos parece vir a sofrer de limitações significativas por dois motivos básicos:

- Elevado número de sinistros por encerrar o que não deixa de ser natural dado estarmos muito próximos dos anos em estudo.

¹Parece provável que, quando se sofrem 5 ou 6 sinistros num ano, não haja mais do que um com gravidade significativa.

- Metodologia de cálculo de provisões que é feita por média global, pese embora o facto se atribuírem valores distintos para sinistros que envolvem ou não danos corporais, o que uniformiza uma parte significativa dos sinistros.

Face a esta situação, um teste entre custo médio e frequência de sinistralidade feito em *Andrade e Silva* [1989] concluiu pela não rejeição da independência entre estas variáveis. Muito embora a carteira então seleccionada fosse composta pelas apólices que figuraram na carteira durante todo o ano de 1987 sem alterações nos dados respeitantes ao segurado e ao veículo seguro, as conclusões a tirar não poderiam ser diferentes dada a forte influência da metodologia de cálculo de provisões que a seguradora utilizou.

Nestas circunstâncias, mais do que apresentar uma multiplicidade de testes sem grande significado prático, optou-se por privilegiar claramente a frequência de sinistralidade, apenas se comentando os custos quando acrescentam efectivamente algo à análise que se está a desenvolver. Como solução de compromisso entre uma visão em termos meramente frequencistas e uma abordagem pelos custos associados aos sinistros, indica-se também o comportamento relativo dos factores em termos dos sinistros envolvendo danos corporais uma vez que estes casos assumirão em média custos bastante mais elevados.

2. As carteiras de 1987 e 1988

Construíram-se duas carteiras referindo-se cada uma delas ao ano a que diz respeito e sendo compostas por dois tipos de apólices:

- apólices que permaneceram na carteira durante todo o ano sem sofrer alterações nos elementos respeitantes ao segurado e ao veículo seguro.
- apólices que entraram na carteira no decorrer do ano, admitindo-se que, nestes casos, não se verificaram alterações nos elementos anteriormente referidos.

Para permitir uma análise conjunta destas duas situações, houve o cuidado de ponderar os sinistros observados pelo tempo de exposição ao risco. Definiu-se então como unidade temporal o ano civil sendo os períodos mais curtos referenciados em termos relativos à unidade escolhida. Assim as taxas médias corresponderão a taxas anuais, o que facilita bastante a interpretação dos resultados.

Neste contexto, a análise será desenvolvida em termos de unidades de risco e não de apólices. Estas unidades, dada a unidade temporal escolhida, corresponderão ao número de apólices/ano.

3. Os diferentes factores

Na análise da influência dos diferentes factores no comportamento dos segurados em termos de sinistralidade, assumirão maior interesse os contrastes gerados por estes factores do que uma avaliação com maior ou menor rigor dos níveis exactos que se observaram, uma vez que estes valores concretos reflectirão sempre uma componente referente ao período a que dizem respeito.

Existe de facto unanimidade na ideia de que a sinistralidade de determinado período é fortemente influenciada por uma série de aspectos externos à relação segurado-seguradora, que vão da evolução da situação económica às modificações das regras de segurança (veja-se por exemplo *Harvey & Durbin* [1986] onde se analisam os efeitos da introdução da obrigatoriedade do uso do cinto de segurança na sinistralidade), para não falar das condições climatéricas, nomeadamente as que ocorrem em momentos decisivos do ano.

No caso em estudo verifica-se um aumento, embora não muito acentuado, na taxa média de sinistralidade quando se passa de 1987 para 1988 cuja explicação se deverá, em boa parte, a uma melhoria do nível de vida neste período que originou maior volume de circulação.

No quadro 8.1 apresentam-se os elementos globais que correspondem às duas carteiras seleccionadas bem como à agregação destas. Sublinha-se uma vez mais que a unidade escolhida para medir o volume de exposição ao risco consiste numa

Quadro 8.1 - Resultados agregados

	1987		1988		Global	
	Freq	Custo	Freq	Custo	Freq	Custo
Média RC	6.79	6192	7.36	4250	7.07	5215
(e.p.)	0.06	130	0.07	93	0.03	56
Média DM	5.81	4436	6.46	3474	6.14	3952
(e.p.)	0.06	85	0.07	77	0.03	40
Média DC	0.97	1755	0.90	777	0.94	1263
(e.p.)	0.02	98	0.02	52	0.01	37
unidades risco	167898.61		169935.53		337824.14	

As frequências estão expressas em percentagem e o erro padrão multiplicado por 100 para manter a compatibilidade com estas. No caso dos custos os valores estão avaliados em escudos e apenas incluem indemnizações atribuídas às apólices. Trata-se de uma avaliação média em função das unidades de risco.

apólice que tenha permanecido o ano inteiro na carteira, ponderando-se, como já se disse, as outras situações com base nesta unidade ².

Neste quadro também se indica o erro padrão da estimativa obtida, definido em termos do quociente entre o desvio-padrão observado e a raiz quadrada do número de unidades observadas, que traduzirá no fundo o grau de confiança que a estimativa obtida apresenta. Como é natural dado o grande volume de apólices observadas, estes valores são bastante pequenos face às médias, pese embora uma grande variação na sinistralidade observada. Os resultados obtidos merecem alguns comentários:

- Em termos de RC, globalmente considerada, o aumento na frequência de sinistralidade não teve contrapartida nos custos uma vez que o custo médio previsto por apólice evoluiu no sentido inverso. A análise dos custos não

²Em quase todos os quadros deste capítulo o número de unidades de risco indicadas corresponde ao valor inteiro que se obtém por arredondamento.

Quadro 8.2 - Natureza dos segurados

	1987					1988				
	Unidades	Frequência		Custo		Unidades	Frequência		Custo	
	Risco	RC	DC	RC	DC	Risco	RC	DC	RC	DC
Particular	165455	98	100	99	100	166650	98	99	99	99
Empresa	2444	208	126	157	133	3286	206	156	164	136

merece no entanto grande confiança dada a forma de obtenção das estimativas e o peso que estas assumem no total apurado. Relembre-se ainda que estes valores apenas incluem as indemnizações pagas e provisões, não considerando nem gastos administrativos nem despesas de índole mais geral como peritagens por exemplo.

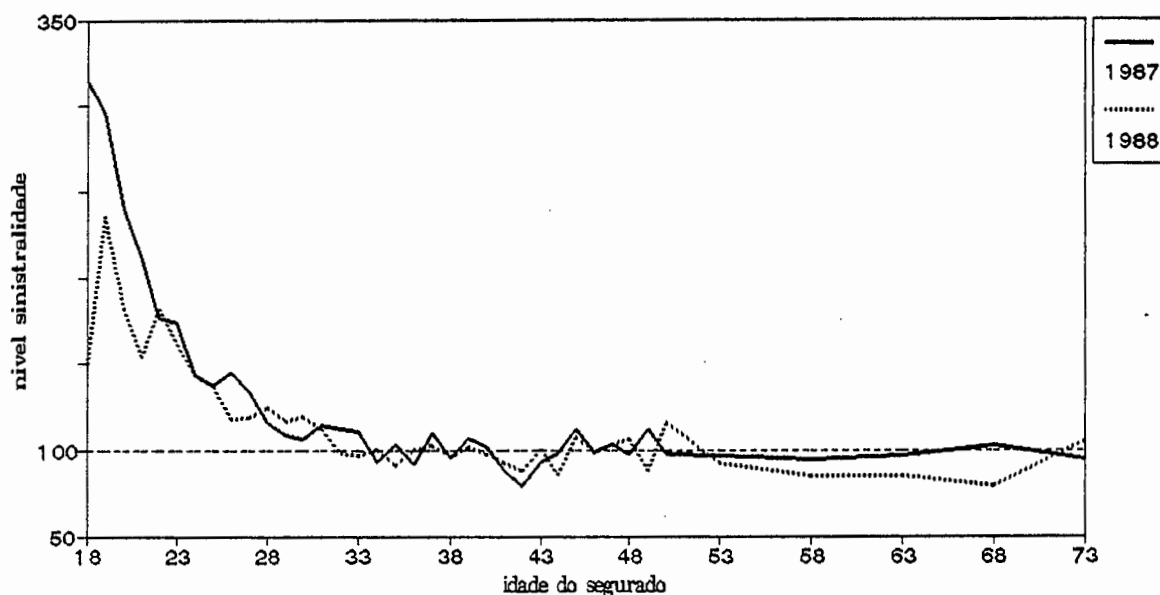
- Em termos de sinistros envolvendo danos corporais, assistiu-se a uma diminuição nos valores observados quer se trate das frequências quer das indemnizações, fenómeno que também pode ter contribuído para o comportamento anómalo que se assinalou na observação anterior.

No estudo da incidência dos diferentes factores que se irá desenvolver nas secções seguintes, considerou-se quase sempre apenas o comportamento relativo das diferentes variáveis em função da média verificada na carteira que se convencionou fixar no nível 100. A principal razão para esta análise em termos relativos reside no facto das taxas médias em 1987 e 1988 serem diferentes o que complica bastante uma comparação directa entre o comportamento dos diferentes factores.

3.1. Tipo de segurado

Se os resultados do quadro 8.2 sugerem claramente que os particulares originam uma sinistralidade bastante menor do que as empresas, particularmente nos sinistros que não envolvem danos corporais (inferior a metade), não se pode deixar de lamentar que apenas se registem como empresas aquelas que possuem pelo menos 10 veículos seguros na companhia.

Gráfico 8.1 - Freq. sinist. em RC em função da idade do segurado



Por outro lado, não se quer deixar de sublinhar que, muito embora o número de apólices registadas na categoria “empresa” seja bastante inferior às outras, o que contribui para explicar uma maior variabilidade nos resultados referentes a esta categoria, o comportamento deste factor apresenta grande estabilidade. Pela clareza dos resultados obtidos não se torna necessário qualquer teste complementar.

3.2. Idade do segurado

Para uma primeira abordagem desta característica, elaborou-se o gráfico 8.1 onde se representam as taxas de sinistralidade em RC para os anos de 87 e 88 em função da idade dos segurados, a partir do indicador de base 100 que já se referiu. Assinale-se também que se eliminaram as apólices para as quais não se conhecia este factor e que correspondem a uma proporção muito importante (cerca de 40% em 87 e 34% em 88).

Por forma a materializar de forma clara a associação que se depreende do

Quadro 8.3 - Primeira agregação em grupos etários

	1987					1988				
	Unidades	Frequência		Custo		Unidades	Frequência		Custo	
	Risco	RC	DC	RC	DC	Risco	RC	DC	RC	DC
18-20	1236	270	283	300	331	1908	193	233	161	278
21-25	7728	161	177	148	140	9237	153	146	151	117
26-30	13989	121	144	128	146	15149	120	126	122	136
31-35	15466	107	95	104	104	16408	100	102	93	91
36-40	15723	102	104	102	123	16793	100	103	107	121
41-45	13161	94	99	91	92	14923	95	99	99	75
46-50	10949	102	112	113	110	11918	103	107	114	150
51-60	15532	96	108	97	90	17179	90	89	92	98
61 ou mais	7246	88	77	91	89	8129	87	77	82	92
omissos	66869	85	78	85	79	58291	89	85	87	76

gráfico 8.1, uma vez que se notam diversas oscilações cujas causas essenciais residem na combinação de um fenómeno de baixa probabilidade (a ocorrência de um sinistro) com células cujo povoamento não é suficientemente grande para atenuar a aleatoriedade inerente ao fenómeno, reagruparam-se as apólices num número mais restrito de grupos etários, tendo-se obtido o quadro 8.3 onde se torna evidente a associação entre idade e taxa de sinistralidade, qualquer que seja o critério de medição desta mesma sinistralidade.

Tal facto pode ainda ser visto de forma mais clara no quadro 8.4 onde se apresentam as frequências médias observadas (em percentagem) em cada grupo bem como o erro padrão ³ associado a este valor médio o que permite construir intervalos de confiança assimptóticos com base na distribuição normal (ou na *t* de Student), intervalos esses que, tendo apenas valor indicativo, permitirão no entanto salientar o grau de contraste existente.

³ Recorde-se que se definiu o erro padrão como o quociente entre o desvio padrão e a raiz quadrada do número de unidades de risco na sub-população.

Quadro 8.4 - As frequências médias observadas (%)

	1987			1988		
	U.R.	RC	(e.p.)	U.R.	RC	(e.p.)
18-20	1236	18.29	1.06	1908	14.20	0.77
21-25	7728	10.93	0.35	9237	11.27	0.32
26-30	13989	8.23	0.23	15149	8.84	0.23
31-35	15466	7.27	0.21	16408	7.37	0.20
36-40	15723	6.89	0.21	16793	7.36	0.20
41-45	13161	6.35	0.21	14923	6.99	0.22
46-50	10949	6.94	0.24	11918	7.56	0.25
51-60	15532	6.54	0.21	17179	6.60	0.20
61 ou mais	7246	6.68	0.10	8129	6.38	0.28

Para efeitos de tarifa, a solução mais adequada parece consistir em efectuar um novo reagrupamento definido-se apenas 4 grupos etários, isto é 18-20, 21-25, 26-30 e 31 ou mais, se bem que em estudos anteriores o grupo etário dos 26-30 anos não tenha apresentado um contraste tão grande em relação ao comportamento médio.

Esta alternativa pode ser apreciada recorrendo a uma tabela de contingência, onde para evitar uma alta proporção de células sem elementos se reagruparam as apólices em dois grupos (com ou sem participações) em função dos grupos etários definidos no ponto anterior, tendo-se tratado separadamente os anos de 1987 e 1988. Estes elementos, que constam do quadro 8.5, permitem efectuar um teste de independência do χ^2 e calcular o coeficiente de contingência de Pearson ⁴ que se designou por *C* como elementos representativos da associação entre estas variáveis, tendo-se indicado entre parênteses o nível de significância do teste do χ^2 .

Os resultados obtidos permitem confirmar a pertinência da discriminação feita, já que os testes de independência rejeitam a hipótese nula com qualquer nível de significância, situação que mantem plena validade quando se tratam quer

⁴Para mais pormenores sobre este coeficiente veja-se por exemplo *Everitt* [1977].

Quadro 8.5 - Análise pelas tabelas de contingência

	1987			1988		
	U.R.	0 sin	1 ou mais	U.R.	0 sin	1 ou mais
18-20	1236	1077	159	1908	1744	164
21-25	7728	7101	627	9237	8500	737
26-30	13989	13061	928	15149	14099	1050
Outros ¹	144946	136734	8212	143641	135052	8589
Total	167899	157973	9925	169936	159395	10540
χ^2	203.66 (0.00%)			94.79 (0.00%)		
C	3.48%			2.36%		

¹ Inclui os casos omissos e as idades superiores a 30 anos.

os sinistros que envolvem danos corporais quer aqueles que apenas incluem danos materiais.

Tratando-se de uma apresentação em termos marginais, não se quer deixar de sublinhar que este factor, quando combinado com o tipo de segurado, permite obter resultados particularmente interessantes, como se irá ver no capítulo 9. Numa situação como a presente, a desagregação da classe etária "Outros" entre particulares e empresas ⁵, permite obter valores para o teste do χ^2 de 396.77 para 1987 e 326.29 para 1988 a que correspondem coeficientes de contingência de 4.85% e 4.38% respectivamente.

O interesse em combinar estes dois factores pode assim ser apreciado quer pelo incremento na ligação entre factor e sinistralidade quer pelo efeito estabilizador que introduz ao conduzir a valores bastante mais próximos para os dois anos em estudo.

⁵Relembre-se que, quando se tratam de empresas, os registos de idade nunca se encontram preenchidos.

Quadro 8.6 - Anos de carta

	1987					1988				
	Unidades	Frequência		Custo		Unidades	Frequência		Custo	
	Risco	RC	DC	RC	DC	Risco	RC	DC	RC	DC
Carta 1988	-	-	-	-	-	2988	226	250	201	215
Carta 1987	1887	279	316	326	434	2972	204	199	207	278
Carta 1986	2528	189	179	209	239	2238	148	129	147	267
Outras sit.	163484	97	96	96	94	161738	95	95	96	92

3.3. Número de anos com carta de condução

Dada a pouca riqueza da informação disponível no que se refere a este factor, já que apenas se conseguem identificar as cartas de condução obtidas a partir de 1986, decidiu-se referir o ano de obtenção da carta em vez do número de anos com carta por forma a aproveitar, para a carteira de 1988, a informação respeitante aos segurados que obtiveram a carta de condução em 1986.

Se é certo que o quadro 8.6 permite concluir que os segurados com menor experiência de condução representam riscos acrescidos para a seguradora, ele não deixa de sublinhar que é necessária alguma prudência antes de tirar conclusões lineares sobre este facto. De facto, a pequena dimensão destes grupos acrescida à diminuta probabilidade associada ao sinistro contribui certamente para explicar as flutuações que se verificam no comportamento relativo dos segurados menos experientes.

Com os dados disponíveis não parece possível avançar mais nesta análise nem tão pouco avaliar a partir de quantos anos de carta se obtem um comportamento semelhante à média da carteira.

3.4. Classe de cilindrada

Como habitualmente, começa-se por introduzir, no quadro 8.7, o comporta-

Quadro 8.7 - Cilindrada dos Veículos

	1987					1988				
	U.R.	Frequência		Custo		U.R.	Frequência		Custo	
		RC	DC	RC	DC		RC	DC	RC	DC
até 1500 cm ³	145727	96	96	93	93	146683	97	98	94	93
de 1500 a 2500 cm ³	20845	128	127	142	142	21920	123	112	141	135
mais de 2500 cm ³	1327	111	147	158	267	1332	102	109	105	254

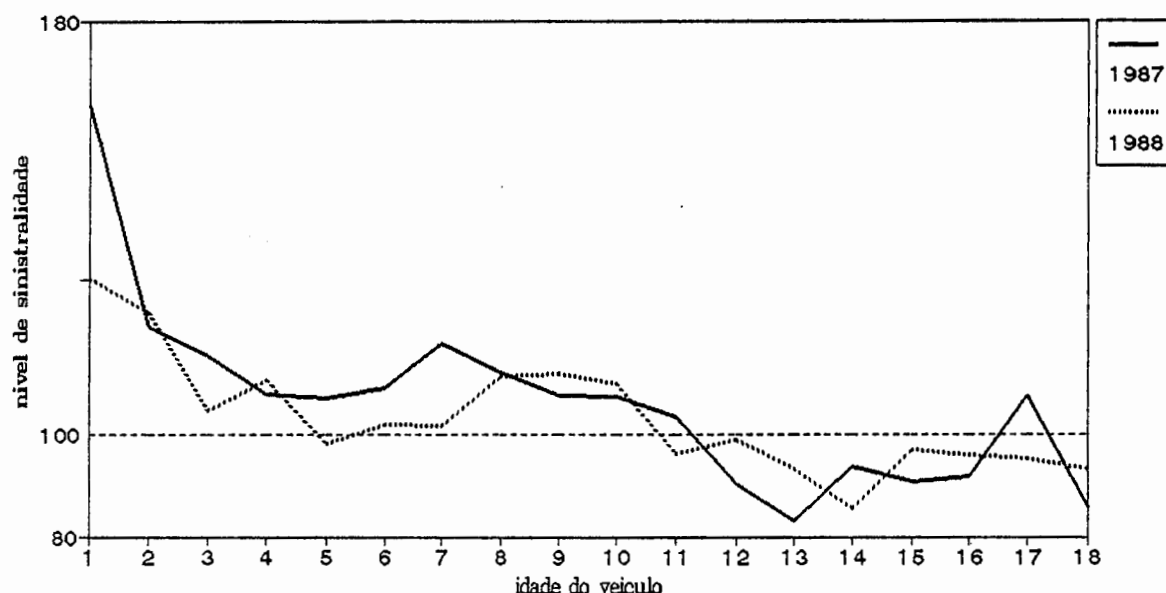
mento relativo da sinistralidade média em função deste factor. Como já se tinha detectado em estudos anteriores para a carteira de 1987 (ver *Andrade e Silva* [1989]), a sinistralidade não apresenta evolução regular em função desta variável.

De facto, a estrutura que se obtem é basicamente igual para os dois anos em estudo e pode caracterizar-se em três aspectos essenciais:

- Evolução “natural” no que diz respeito aos sinistros envolvendo danos corporais cuja taxa média aumenta com o acréscimo de potência dos veículos.
- Comportamento mais complexo dos sinistros com danos materiais, situação que origina que, para o conjunto da sinistralidade em RC, se assista a um agravamento de sinistralidade na passagem dos veículos até 1500 cm³ para a classe imediatamente superior para observar uma evolução contrária na passagem para a classe dos veículos mais potentes (acima de 2500 cm³).
- Dada esta evolução, e atendendo também ao facto dos sinistros com danos corporais envolverem custos acrescidos, uma abordagem pelos custos registará um maior amortecimento na passagem para a classe de maior potência. Assinale-se ainda que, para 1987, se obtem uma evolução “natural” quando se recorre aos custos, o mesmo não se verificando em 1988.

Estes resultados sugerem o recurso, quando possível, a outras informações que permitam uma descrição alternativa e mais adequada da potência dos veículos,

Gráfico 8.2 - Freq. de sinistralidade em RC em função da idade dos veículos



sublinhando-se aliás que nos estudos empíricos mais divulgados (veja-se o capítulo 6) é bastante mais frequente o recurso a outras medidas. Tenha-se também presente que não se teve em conta o tipo de combustível sendo previsível uma presença significativa de veículos diesel na classe de mais alta cilindrada.

3.5. Idade dos veículos

De forma semelhante ao que se fez para os segurados, construi-se o gráfico 8.2 onde se apresenta o comportamento relativo dos veículos perante a frequência de sinistralidade em RC em função da sua antiguidade. Tenha-se presente que a categoria “até 1 ano”, que corresponde ao valor 1 no eixo das abcissas, apenas engloba veículos que pertencem a novos segurados uma vez que, caso assim não fosse, tratar-se-ia de apólices cujas características sofreram alterações nos elementos referentes ao veículo não sendo portanto seleccionadas por se desconhecer o momento da alteração (veja-se o capítulo 7).

Existindo assim um número bastante restrito de apólices nesta categoria, não será de estranhar um comportamento tão dispar. No que se refere às restantes classes, assiste-se a um comportamento que se pode caracterizar de forma bastante aceitável como sendo linear decrescente. Uma estimação pelo método dos mínimos quadrados ponderados com base na totalidade dos dados aponta para uma relação do tipo

$$tx = 122.12 - 1.9676 i \qquad R^2 = 78\%$$

em que tx representa a frequência relativa de sinistralidade (base 100 em termos nacionais) e i a idade do veículo (em anos).

O facto do envelhecimento dos veículos originar uma menor tendência à sinistralidade, resultado que também se obteve em *Andrade e Silva* [1989] embora num contexto ligeiramente diferente, não deixa de ser surpreendente uma vez que, quer a tarifa em vigor quer os resultados obtidos noutros países, apontam para um comportamento contrário isto é para um aumento do risco com a idade do veículo.

Uma explicação deste fenómeno poderá residir na existência de diferentes condições económicas, facto que origina que, em Portugal, se proceda a uma renovação dos veículos bastante mais tardia e que se conservem muitos automóveis que apenas circulam de forma esporádica. Para analisar tal hipótese seria necessário possuir informações adicionais, nomeadamente sobre a quilometragem anualmente percorrida.

Não parece no entanto possível instituir uma correspondência entre o comportamento deste factor e a tarifa a implementar já que seria de difícil aceitação pelos segurados que, pelo simples facto de renovarem o seu veículo, adquirindo um automóvel que se encontra em melhor estado, tenham de ser penalizados no prémio a pagar. A situação contrária, isto é manter uma penalização para os veículos mais velhos, também não parece muito adequada face aos dados em análise pelo que se recomendaria a recolha de informação complementar que permitisse uma melhor compreensão das causas deste fenómeno, bem como o seu tratamento na tarifa em termos que sejam socialmente aceitáveis.

Quadro 8.8 - Sistema de bonus em vigor

	1987					1988				
	U.R.	Frequência		Custo		U.R.	Frequência		Custo	
		RC	DC	RC	DC		RC	DC	RC	DC
Inicial	41143	147	148	156	167	55109	130	131	118	119
Desc. 30%	114001	77	78	73	65	103989	79	80	82	78
Agrav. 15%	10365	134	126	150	201	8920	136	121	169	193
Agrav. 30%	1747	208	206	193	216	1427	183	140	169	155
Agrav. 45%	451	288	182	225	26	344	276	324	399	749
Agrav. 100%	192	345	214	329	10	147	333	152	380	589

3.6. A posição na escala de bonus em vigor

De todas as características que se observaram, a posição na escala de bonus é sem dúvida aquela que apresenta maior ligação com a sinistralidade. O quadro 8.8 permite aliás verificar que se obtêm situações extremamente contrastadas.

A qualidade da discriminação introduzida pode também ser vista no quadro 8.9 onde se indicam as frequências de sinistralidade realmente observadas e os erros padrões correspondentes que permitem verificar que o intervalos assintóticos que se constroem são praticamente disjuntos para níveis de confiança da ordem dos 99%.

3.7. A marca do veículo

Se existem alguns modelos de construção de tarifas que, para além das características técnicas dos veículos, tiram partido da marca e modelo destes (vejam-se os capítulos 3 e 6), este tipo de abordagem não parece muito aplicável ao caso em estudo quer pela grande pulverização da carteira em termos de marcas e modelos distintos quer pelas graves insuficiências que existem no levantamento das características técnicas, problema referido no capítulo anterior.

Quadro 8.9 - Freq. de sinistralidade em RC por classes de bonus

	1987			1988		
	U.R.	RC	(e.p.)	U.R.	RC	(e.p.)
Inicial	41143	9.96	0.14	55109	9.58	0.12
Desc. 30%	114001	5.24	0.07	103989	5.81	0.08
Agrav. 15%	10365	9.07	0.30	8920	9.98	0.34
Agrav. 30%	1747	14.08	0.92	1427	13.45	1.03
Agrav. 45%	451	19.51	2.07	344	20.35	2.39
Agrav. 100%	192	23.44	3.70	147	24.49	3.80

As taxas estão expressas em percentagem e o erro padrão multiplicado por 100 para manter a compatibilidade com estas.

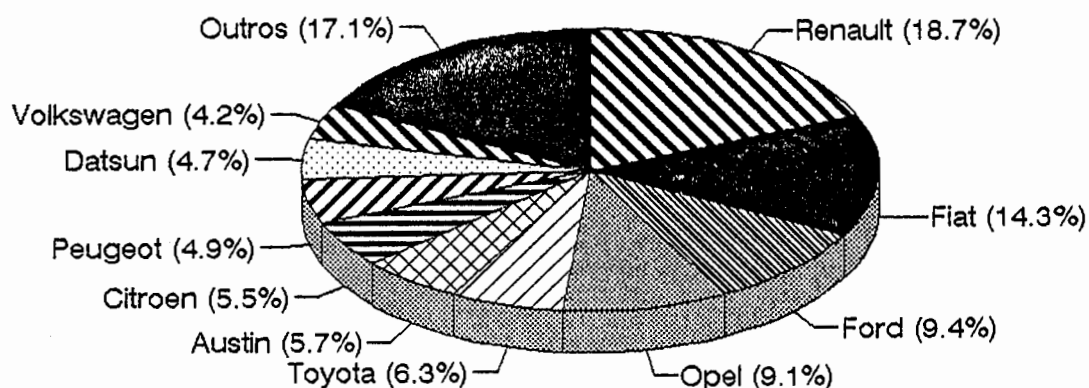
Enquanto a primeira razão origina populações muito diminutas para a maioria dos pares marca/modelo, a segunda não permite separar a informação referente à marca daquela que diz respeito a características que se deveriam avaliar de forma autónoma da marca, já que não se dispõe dum levantamento muito completo no que concerne estas mesmas características.

É de qualquer forma importante relembrar que, na maioria dos casos, apenas se dispõe da marca dos veículos e não dos modelos, situação que impossibilita que se possa completar a informação disponível com uma melhor caracterização técnica dos veículos. Neste quadro apenas se utilizará este factor com intuítos ilustrativos.

A pulverização da carteira pode ser ilustrada na figura 8.1 onde se isolaram as 10 marcas mais significativas que correspondem a cerca de 83% da carteira. Muito embora não se disponha, como se disse, de informação quantificada, não parece muito difícil relacionar algumas destas marcas com diversos modelos que atingiram graus de popularidade significativos no mercado português.

Em termos de comportamento face à sinistralidade, apresenta-se o quadro 8.10, construído nos termos habituais, cujo conteúdo comprova, em termos gerais, o facto das marcas conotadas com os modelos mais desportivos apresentarem maior

Figura 8.1 - Composição da carteira por marcas



propensão à sinistralidade. Nas marcas com maior implantação as taxas rondam valores semelhantes com excepção dos veículos de marca Peugeot que apresentam uma taxa muito elevada face às restantes.

3.8. A residência do segurado

Dos factores que não foram incluídos na tarifa em vigor em Portugal, este é sem dúvida aquele que surge como mais promissor dado o seu peso noutros sistemas tarifários e os bons resultados obtidos em estudos similares.

Não se trata, como é evidente, de avaliar a área de residência do segurado em si-mesma mas sim a zona de maior circulação do veículo. No caso dos automóveis ligeiros de passageiros, não custa admitir que estas duas variáveis apresentem correlação quase perfeita, sendo necessária uma apreciação mais cuidada no que concerne a outras classes de veículos. Sublinhe-se ainda que, mesmo para a classe em estudo, a situação não é muito clara no que respeita aos veículos pertencentes a empresas (registadas ou não como tal) uma vez que a área de serviço destes

Quadro 8.10 - Sinistralidade por marcas

	1987					1988				
	U.R.	Frequência		Custo		U.R.	Frequência		Custo	
		RC	DC	RC	DC		RC	DC	RC	DC
Alfa Romeo	762	126	148	184	251	926	114	120	91	144
Audi	629	122	147	106	59	675	105	115	141	264
Austin	10169	89	65	85	68	9189	96	96	89	92
BMW	2321	114	111	172	231	2375	96	141	102	96
Citroen	9232	102	97	96	81	9291	104	99	92	78
Datsun	8294	108	98	99	84	7689	96	104	104	138
Fiat	24520	94	93	88	72	23788	94	94	85	69
Ford	16103	98	103	109	122	15782	98	90	106	104
Honda	1418	91	80	81	73	1350	93	66	95	85
Mazda	1225	102	126	73	80	1172	99	105	108	101
Mercedes	3047	131	199	135	157	3106	118	147	174	314
Morris	5000	95	62	76	34	4231	103	79	110	98
Nissan	835	76	111	71	57	1196	78	75	57	29
Opel	14610	96	96	97	101	16081	102	99	102	97
Peugeot	8038	127	121	132	155	8393	114	96	121	120
Renault	29814	106	107	99	101	33289	105	116	99	100
Rover	733	90	28	78	10	1197	108	84	102	28
Seat	598	113	137	92	72	1359	120	90	124	106
Simca	3611	78	85	97	144	3015	74	70	82	36
Sunbean	683	80	60	65	17	597	96	131	132	205
Talbot	1155	111	107	146	215	1116	89	100	56	91
Toyota	10721	92	103	97	83	10712	95	88	105	110
Triumph	634	84	49	264	781	576	85	135	100	368
Vauxhall	2419	99	89	108	97	2030	94	60	96	46
Volkswagen	7436	92	116	95	101	6775	94	100	84	93
Volvo	1009	112	102	129	123	1129	83	109	118	135
Outras marcas	2881	97	107	92	72	2896	111	108	119	75

poderá apresentar forte discrepância em relação à área de registo. No entanto, para a esmagadora maioria das apólices em estudo vigorará uma correspondência quase perfeita.

Com base na informação disponível, pode-se analisar a incidência da zona de circulação sobre a sinistralidade tomando-se como unidade geográfica base o distrito ou o concelho. Numa primeira sub-secção descrever-se-á a situação observada, avançando-se seguidamente para algumas alternativas de variáveis regionais a introduzir na tarifa. Tal estrutura, um pouco diferente daquelas a que se recorreu até aqui, procurará cobrir o facto de se tratar de um factor não incluído na tarifa para o qual, por um lado não existem dúvidas sobre o seu interesse e por outro surgem múltiplas alternativas para a sua inclusão.

3.8.1. A situação existente

Para descrever a situação observada, construiu-se o quadro 8.11 onde se apresenta o comportamento relativo da sinistralidade nos diferentes distritos.

Com base neste quadro, e seleccionando como factor base a frequência de sinistralidade, elaboraram-se os mapas que constam da figura 8.2 que também permitem avaliar este comportamento no que respeita à sinistralidade em Responsabilidade Civil nas duas carteiras.

Uma análise destes mapas, complementada com os dados do quadro 8.11, permite extrair desde logo como ideia base que, à excepção das Regiões Autónomas dos Açores e da Madeira, a frequência de sinistralidade acompanha o nível de desenvolvimento económico do distrito. De facto é fácil destacar as duas áreas urbanas existentes com as taxas mais elevadas, dividindo-se o resto do território continental em termos de litoral face ao interior.

Os casos da Madeira e dos Açores, com taxas superiores às das áreas urbanas constituem excepções que se ficam provavelmente a dever a condicionantes locais, sublinhando-se que, no caso dos Açores, o problema principal reside na ilha de São Miguel cuja taxa é decisiva face à pequenez da amostra nas restantes ilhas.

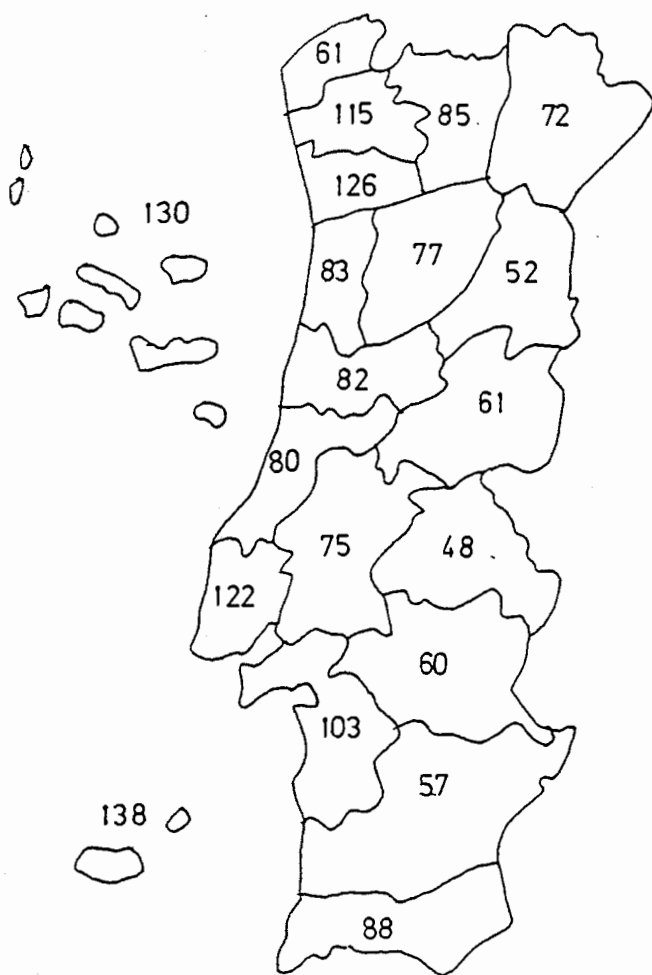
Quadro 8.11 - Sinistralidade relativa observada nos distritos

	1987					1988				
	U.R.	Frequência		Custo		U.R.	Frequência		Custo	
		RC	DC	RC	DC		RC	DC	RC	DC
Aveiro	12812	83	115	95	122	13048	86	123	96	149
Beja	3152	57	46	44	25	3183	65	84	49	88
Braga	9171	115	155	126	156	9756	103	118	114	127
Bragança	1129	72	45	59	14	1156	47	58	29	10
C. Branco	4366	61	59	44	39	4379	65	53	50	42
Coimbra	9038	82	97	74	94	8880	88	88	76	75
Évora	3366	60	67	62	100	3326	55	74	54	68
Faro	7511	88	93	72	58	7802	97	100	89	56
Guarda	2901	52	35	40	6	2827	60	67	49	43
Leiria	8529	80	99	70	80	8782	83	110	91	103
Lisboa	49096	122	92	120	105	49709	123	97	121	100
Portalegre	2775	48	74	35	23	2703	61	66	64	118
Porto	17347	126	121	151	145	16920	127	110	138	122
Santarém	9982	75	98	72	81	10093	71	88	73	103
Setúbal	14408	103	113	96	116	14591	98	106	98	101
V. Castelo	1918	61	112	63	40	1971	77	119	48	65
V. Real	2199	85	107	91	91	2247	78	84	65	90
Viseu	4840	77	95	73	52	5070	70	110	60	98
Açores	757	130	54	156	105	833	137	53	221	13
Madeira	2603	138	126	154	153	2656	131	143	115	115

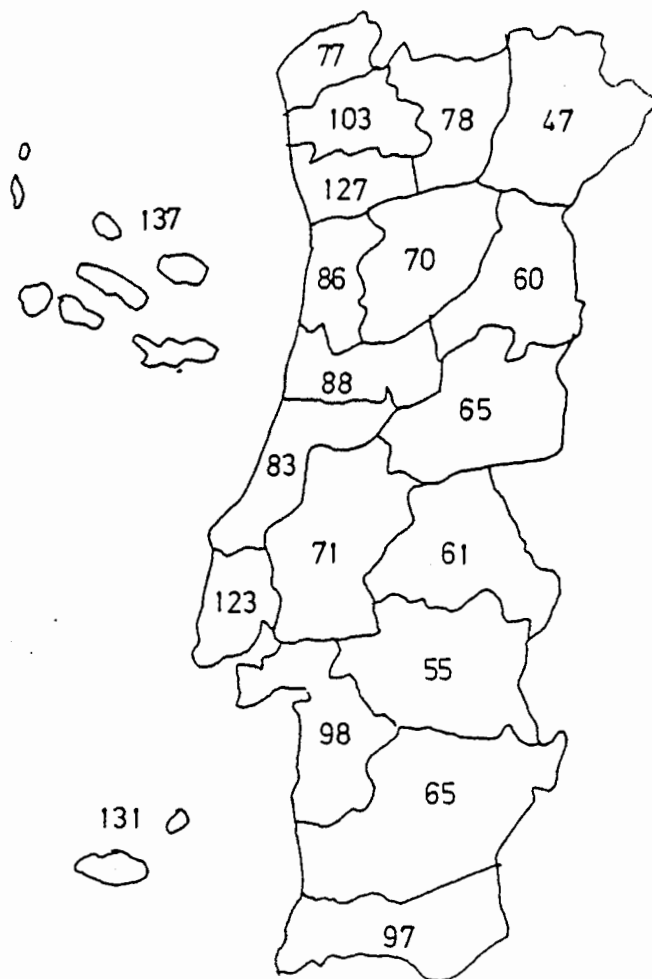
Figura 8.2 - Sinistralidade relativa em R.C. por distrito

(indicador de base 100 para cada ano)

1987



1988



Esta análise conduz a equacionar o problema de saber até que ponto uma estrutura distrital permite uma caracterização suficientemente adequada das áreas urbanas, fenómeno que é posto em causa pelo comportamento verificado nos distritos de Braga e Setúbal onde se observam taxas intermédias entre as áreas urbanas e o restante litoral. No ponto seguinte discutir-se-á esta questão de forma mais aprofundada.

Antes porém de passar à construção das diferentes alternativas que traduzem a componente regional na sinistralidade, duas palavras ainda para apresentar as abordagens pelos custos e pela frequência de sinistros envolvendo danos corporais.

Como seria de esperar, em termos de sinistros envolvendo danos corporais não se pode definir um padrão com uma tradução tão imediata em termos da realidade socio-económica do país por se tratar de um fenómeno que envolve uma aleatoriedade ainda maior. Continua no entanto a vigorar a separação entre interior e litoral com taxas bastante mais elevadas nas zonas mais desenvolvidas sendo de sublinhar a atenuação deste fenómeno nas áreas urbanas.

Curiosamente, o comportamento das duas regiões autónomas aparece com alto contraste; enquanto os Açores apresentam uma taxa semelhante ao interior do país, a Madeira apresenta as taxas mais elevadas em termos nacionais.

Em termos de custo esperado, pode-se distinguir, uma vez mais, a fractura entre litoral e interior, sendo no entanto difícil de interpretar os resultados concretos que se obtêm em cada ano dada a forma de cálculo de provisões que foi utilizada.

3.8.2. A construção de possíveis variáveis regionais

Antes de discutir a construção em termos práticos de tais variáveis, é necessário sublinhar que uma variável regional não poderá basear-se unicamente na sinistralidade observada, mesmo que se possuam observações ao longo de vários anos.

De facto, para limitar as arbitrariedades que inevitavelmente ocorrem no traçar de uma fronteira, é necessário basear as regiões em critérios mais latos

que se fundamentem numa base institucional por forma a serem por um lado socialmente aceitáveis e por outro a manterem uma estabilidade mínima ao longo do tempo.

No quadro institucional que vigora em Portugal, qualquer proposta a ser implementada no curto prazo não poderá fugir a uma estrutura baseada nos distritos ⁶, eventualmente complementada por uma análise mais fina das áreas urbanas. Quando se conseguirem ultrapassar os bloqueios à construção de regiões no território continental, estas constituirão eventualmente uma unidade privilegiada para o estabelecimento de uma variável deste tipo.

Tendo em conta esta situação, discutir-se-ão basicamente alternativas baseadas nos distritos, apenas se recorrendo aos concelhos no casos das áreas urbanas de Lisboa e Porto.

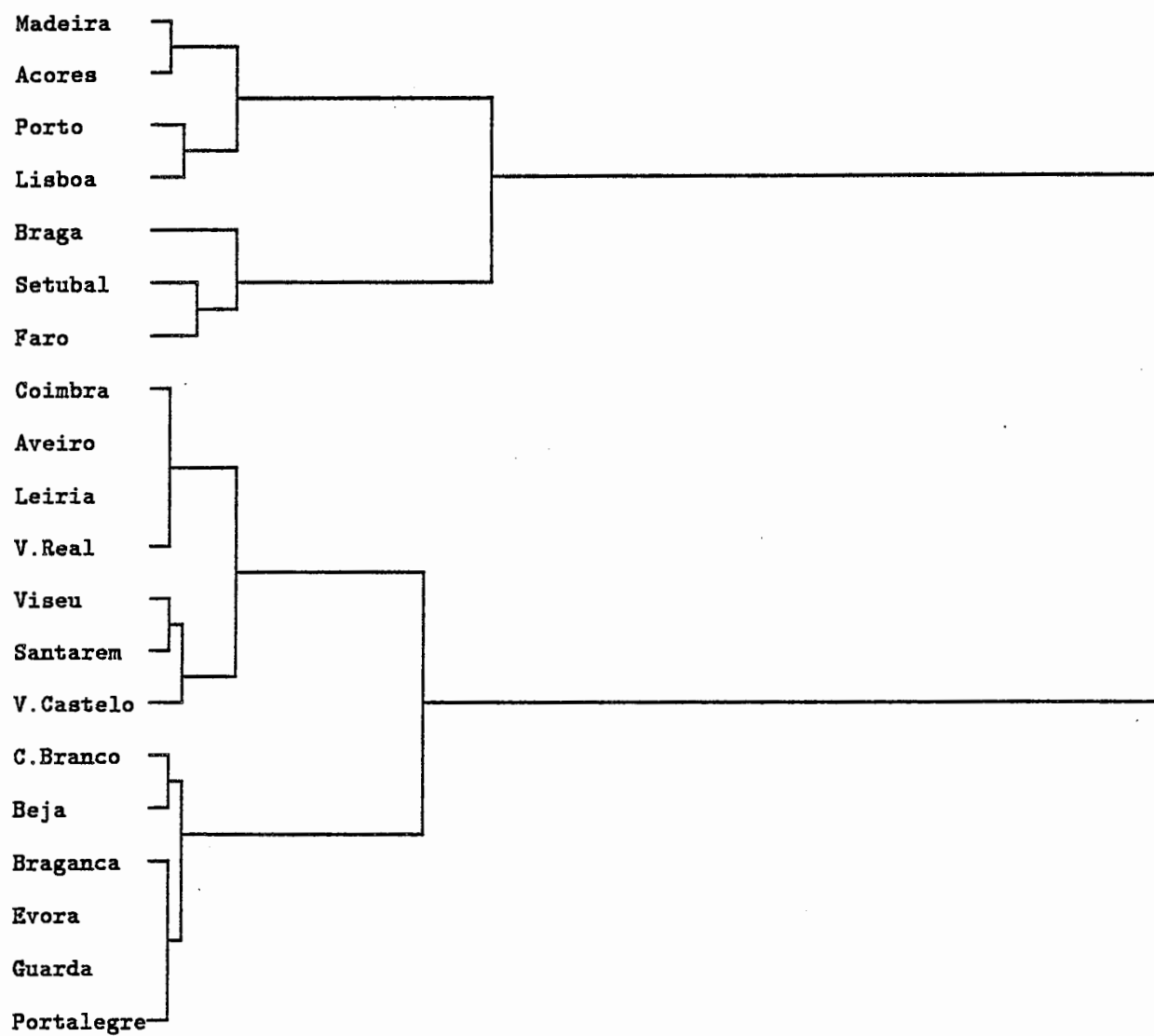
Uma abordagem exclusivamente pelos distritos Como se viu na figura 8.2, o ponto mais polémico numa abordagem com base distrital consiste na determinação da região onde se devem incluir os distritos de Braga e Setúbal uma vez que apresentam níveis intermédios de sinistralidade entre os polos urbanos e a zona litoral de maior desenvolvimento.

Procurando ir um pouco além do que se fez em trabalhos anteriores, procedeu-se a uma análise em "clusters" pelo método da ligação média ("average link"), ponderando-se cada distrito pela sua representatividade em termos de unidades de risco para não desequilibrar o centro de gravidade dos grupos que se vão formando. Como medida de diferenciação optou-se pela distância euclideana entre as propensões médias ao sinistro em responsabilidade civil, tendo-se trabalhado o conjunto das duas carteiras.

Os resultados obtidos e que se sintetizaram no dendrograma que consta da figura 8.3 apontam, como solução mais viável, para a constituição de 4 regiões que correpondem a outras tantas zonas claramente identificadas:

⁶Exceptuam-se, como é evidente, as regiões autónomas dos Açores e da Madeira que constituem entidades perfeitamente aceites.

Figura 8.3 - Dendrograma da análise em "clusters" - Distritos



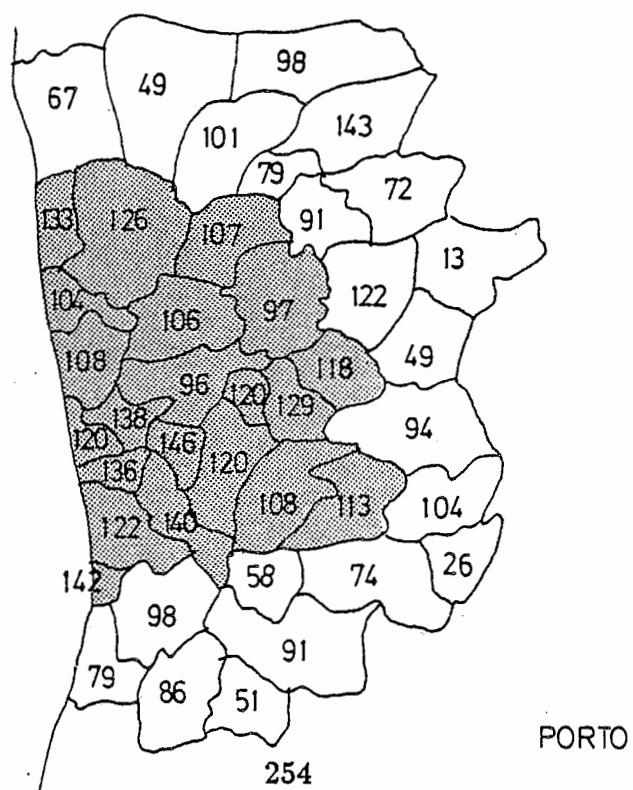
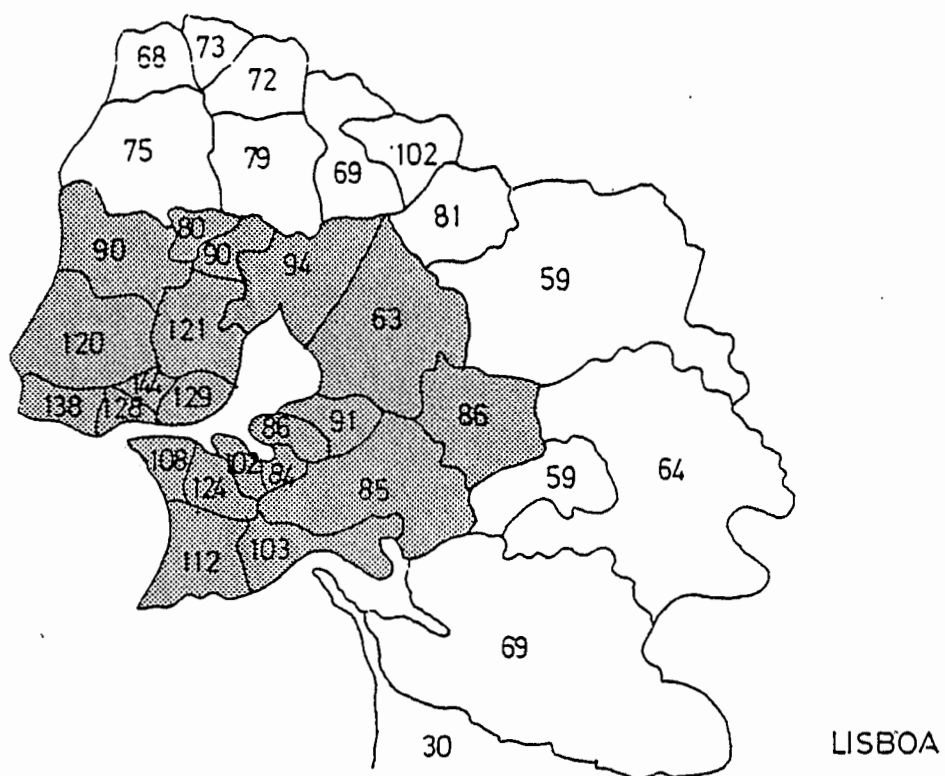
- Distritos urbanos do Porto e Lisboa, a que se agregam as regiões autónomas dos Açores e da Madeira que constituem, como já se disse, um caso específico.
- Distritos complementares das áreas urbanas (casos de Braga e Setúbal) e distrito de Faro onde o desenvolvimento urbano também se encontra muito avançado.
- Distritos do litoral, de Viana do Castelo a Leiria passando por Vila Real, Viseu e Santarém que apresentam características não muito diferentes.
- Distritos do interior de norte a sul do território continental, o que traduz bem os diferentes níveis de desenvolvimento do país.

No quadro 8.13, onde se sintetizam os resultados obtidos com as duas abordagens, pode ver-se, em termos mais formais, a constituição de cada uma destas regiões com base nos distritos que a compõem (variável RD1).

Os concelhos na definição das áreas urbanas A situação em termos concelhos na vizinhança das áreas metropolitanas pode ser vista na figura 8.4 onde se referem as posições relativas dos diferentes concelhos perante a sinistralidade, mantendo como padrão (nível 100) o valor médio observado a nível nacional. Os dados apresentados correspondem ao conjunto das duas carteiras, assinalando-se ainda diferenças importantes na dimensão das amostras referentes aos vários concelhos, situação que se deve não só à dimensão populacional destes como também a níveis variáveis de implantação da seguradora.

Com base nestes elementos, e tendo também presente as propostas de definição de regiões elaboradas pelo Ministério da Administração Interna em 1976, uma vez que estas propostas referiam especificamente a definição de áreas urbanas, construíram-se as duas regiões urbanas nos termos que constam do quadro 8.12 situação a partir da qual se procedeu a nova análise em "clusters", em termos semelhantes ao processo seguido anteriormente. Como é natural os concelhos pertencentes aos distritos referidos no quadro 8.12 e que não foram incluídos na zona urbana respectiva mantiveram-se nos distritos originais.

Figura 8.4 - Comportamento dos concelhos em torno das áreas metropolitanas



Quadro 8.12 - Definição das áreas urbanas

Área Urb.	Distrito	Concelhos
Lisboa	Lisboa	Amadora, Arruda dos Vinhos, Cascais, Lisboa, Loures, Mafra, Oeiras, Sintra, Vila Franca de Xira.
	Santarém	Benavente
	Setúbal	Alcochete, Almada, Barreiro, Moita, Montijo, Palmela, Seixal, Sesimbra, Setúbal.
Porto	Aveiro	Espinho
	Braga	Barcelos, Braga, Esposende, Guimarães, Vila Nova de Famalicão
	Porto	todo o distrito excepto Amarante e Baião

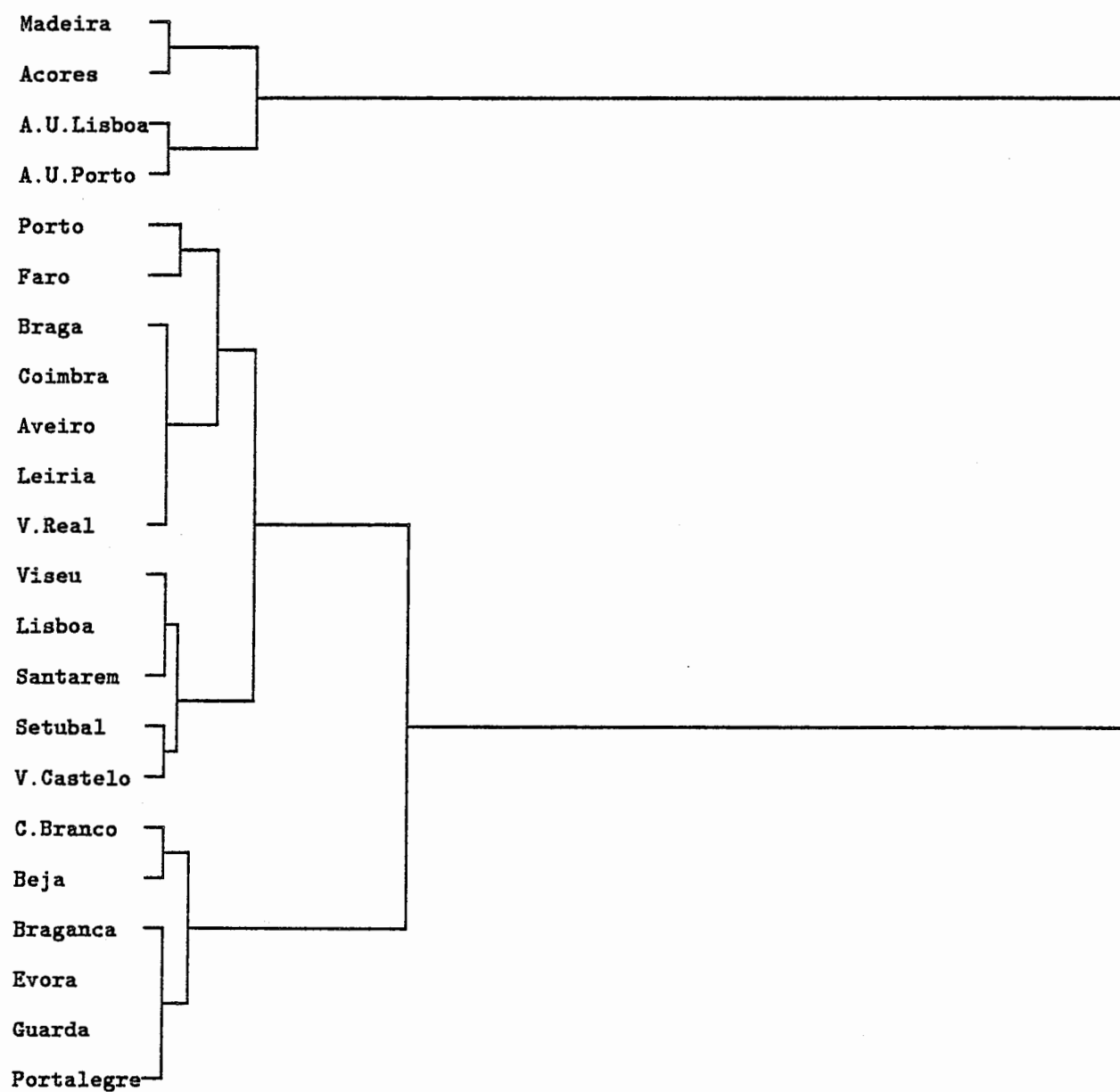
Em termos comparativos com as propostas referidas (*M.A.I. [1977]*), não se alterou a definição proposta para a área de de Lisboa e engrossou-se significativamente a área referente ao Porto que, mais do que traduzir a área metropolitana propriamente dita, passou a corresponder ao eixo Porto-Braga reforçado por alguns concelhos interiores do distrito do Porto.

A figura 8.5, dendrograma da análise em "clusters", sublinha o interesse duma abordagem que tenha em conta a existência das duas áreas urbanas uma vez que, ao contrário do que sucedeu com a análise baseada unicamente numa estrutura distrital, permite várias alternativas para a formalização de um factor regional.

Dentro destas alternativas, aquelas que sugerem a formação de 3 ou 4 regiões parecem mais adequadas, se bem que a opção por uma delas não seja tão fácil. No quadro 8.13 apresentam-se estas alternativas para além da formulação em termos exclusivamente distritais.

De facto, a formulação em termos de 4 zonas permite uma comparação mais directa com os agrupamentos com origem numa estrutura exclusivamente baseada nos distritos enquanto o reagrupar para 3 regiões sintetiza os três grupos que se destacam claramente da análise.

Figura 8.5 - Dendrograma da análise em "clusters" - Áreas Urbanas



Quadro 8.13 - Definição das Regiões

Proposta	Região	Distritos (Regiões Autónomas)
RD1	1	Lisboa, Porto, Açores, Madeira
	2	Braga, Faro, Setúbal
	3	Aveiro, Coimbra, Leiria, Santarém, V. Castelo, V. Real, Viseu
	4	Beja, Bragança, C. Branco, Évora, Guarda, Portalegre
RC1	1	Açores, Madeira, A. U. Lisboa, A. U. Porto
	2	Aveiro ¹ , Braga ¹ , Coimbra, Faro, Leiria, Porto ¹ , V. Real
	3	Lisboa ¹ , Santarém ¹ , Setúbal ¹ , V. Castelo, Viseu
	4	Beja, Bragança, C. Branco, Évora, Guarda, Portalegre
RC2	1	Açores, Madeira, A. U. Lisboa, A. U. Porto
	2	Aveiro ¹ , Braga ¹ , Coimbra, Faro, Leiria, Lisboa ¹ , Porto ¹ , Santarém ¹ , Setúbal ¹ , V. Castelo, V. Real, Viseu
	3	Beja, Bragança, C. Branco, Évora, Guarda, Portalegre

¹ Estes distritos foram amputados dos concelhos que foram incluídos nas áreas urbanas (ver quadro 8.12)

Quadro 8.14 - Sinistralidade relativa nas regiões - dados globais

		U.R.	Frequência		Custo		Freq. R.C.	
			RC	DC	RC	DC	Freq	(e.p.)
RD1	1	187848	119	106	122	116	8.42	0.07
	2	15313	93	96	79	57	6.58	0.20
	3	99408	80	104	79	95	5.65	0.07
	4	35264	59	61	48	47	4.16	0.11
RC1	1	175896	122	107	126	117	8.64	0.07
	2	83408	85	104	84	96	6.02	0.08
	3	43265	73	95	69	82	5.13	0.11
	4	35264	59	61	48	47	4.16	0.11
RC2	1	175896	122	107	126	117	8.64	0.07
	2	126673	81	101	79	91	5.72	0.07
	3	35264	59	61	48	47	4.16	0.11

Na interpretação dos resultados do quadro 8.14 é necessário ter presente que as regiões foram definidas com base na frequência de sinistros em responsabilidade civil, podendo portanto existir, como acontece no caso da variável RD1, discrepância ao nível dos restantes indicadores.

No caso das regiões que têm em conta a definição de áreas urbanas, verifica-se sempre um comportamento regular, sendo de assinalar que na passagem da frequência de participações em responsabilidade civil para o sub-grupo daquelas onde se registaram danos corporais, atenuam-se, como era esperado, as diferenças entre os grupos 1 e 2.

De qualquer forma, a principal conclusão a tirar desta abordagem não pode deixar de ser o sublinhar toda a pertinência em considerar este factor na construção de tarifas.

Capítulo 9

Primeira Modelização da Estrutura Tarifária

Neste capítulo apresenta-se um tratamento formalizado para modelizar diversas alternativas para a tarifa a aplicar ao ramo automóvel. Retomam-se assim trabalhos anteriores (nomeadamente *Andrade e Silva* [1989]) recorrendo-se a uma metodologia baseada nos modelos lineares generalizados para tratar as carteiras definidas no capítulo 7 e cuja principal diferença em relação àquela que foi objecto de análise no trabalho citado consiste no tomar em consideração as apólices que tenham entrado na carteira no decorrer dos anos em estudo.

À semelhança do que é habitual em estudos desta natureza, considera-se o sistema de bonus como parcialmente fixado, isto é estimam-se apenas os coeficientes a aplicar em cada uma das classes, não se discutindo nem as regras de transição nem fenómenos como a sede de bonus. No próximo capítulo apresentar-se-á uma visão original para o tratamento desta problemática.

Começa-se assim por apresentar sumariamente, na secção 1, os princípios básicos inerentes à tarifa em vigor em 1987 estimando-se os valores que, em termos estatísticos, melhor traduzem o comportamento das carteiras em estudo, discutindo-se então quer a qualidade das estimativas obtidas, quer os valores estabelecidos na tarifa. Nesta secção também se abordam algumas formulações alternativas para o modelo base, considerando-se nomeadamente uma estrutura

de tipo aditivo.

Na secção 2, discutem-se algumas alternativas com base na informação disponível, analisando-se as melhorias que tais modificações originam. Particular realce é dado à introdução de um factor que traduza a zona habitual de circulação do veículo bem como a uma melhor definição dos diferentes grupos etários a considerar, abordando-se também o facto das empresas observarem taxas de sinistralidade acrescidas.

Por fim, na secção 3, comparam-se os resultados com aqueles que seriam de esperar em termos de estudos semelhantes dando, como é natural, uma importância maior ao estudo anteriormente citado por se aplicar a Portugal e por se basear, de forma parcial, numa das duas carteiras que se estão agora a analisar.

1. Análise da tarifa em vigor

Se é inegável que a tarifa em vigor neste período não foi construída com base em nenhum modelo estatístico, é no entanto possível conceber à posteriori um modelo que descreva o sistema tarifário.

De facto, esta tarifa obedece a uma estrutura mista no que diz respeito aos factores directamente mensuráveis, onde o factor “cilindrada do veículo” combina de forma multiplicativa com os restantes factores que, por seu turno, se ligam aditivamente entre si. Por outro lado o sistema de descontos (ou eventualmente agravamentos) a aplicar no prémio em função das participações com responsabilidade do segurado feitas nos anos anteriores¹ combina multiplicativamente com os outros elementos tarifários.

Não parecendo adequado recorrer a uma estrutura tão complexa numa situação onde as limitações mais significativas advêm certamente dos dados disponíveis,

¹Muito embora o sistema de bonus seja apresentado de forma mais pormenorizada no capítulo seguinte, retenha-se para já que a sua característica fundamental reside no facto de existir apenas uma classe onde vigora um bonus, classe para a qual se transita após duas anuidades consecutivas sem sinistros participados, qualquer que seja a situação prévia.

optou-se, à semelhança de trabalhos anteriores, por privilegiar a componente multiplicativa, não só por ser a estrutura mais promissora em termos de uma modelização estatística como também por corresponder à componente que assume maior peso na tarifa em vigor (veja-se o capítulo 8). Uma modelização com base numa estrutura mista, embora aplicada a seguros de saúde, pode ser vista em *von Geusau [1989]*.

Para modelizar a tarifa é necessário escolher, para cada variável, uma situação padrão, definindo-se os restantes casos em termos de variação face ao padrão fixado. Recordam-se seguidamente os 5 factores incluídos nesta estrutura tarifária, assinalando-se em *itálico* a situação padrão. As percentagens de desconto ou agravamento originadas pelas restantes situações para cada um dos factores figuram no quadro 9.1 (coluna “em vigor”), referente à estimação do modelo base tendo-se representado os descontos como agravamentos negativos.

- cilindrada do veículo considerando-se três classes:
 - *até 1500 cm³*.
 - de 1501 a 2500 cm³.
 - mais de 2500 cm³.
- idade do veículo, definindo-se, para efeitos de responsabilidade civil, duas categorias:
 - *até 8 anos*.
 - mais de 8 anos.
- idade do segurado (ou condutor habitual), existindo duas situações:
 - *idade superior a 25 anos*.
 - idade até 25 anos.
- há quantos anos obteve o segurado a carta de condução
 - *mais de 2 anos*.

- até 2 anos.
- número de participações com responsabilidade do segurado feitas nos dois anos anteriores, situação que origina o desconto ou agravamento que vai incidir sobre a apólice. A interpretação deste esquema como sistema de bonus/malus pode ser vista em *Andrade e Silva* [1988], apenas se utilizando neste capítulo o nível tarifário onde as apólices se encontravam e que pode ser:
 - 0 participações e apólice com mais de 2 anos.
 - *apólice em vigor há menos de 2 anos sem participações registadas.*
 - 1 participação.
 - 2 participações.
 - 3 participações.
 - 4 ou mais participações. Reagruparam-se nesta classe os casos que originaram mais de 4 participações quer porque o agravamento é fixado, em termos legais, caso a caso quer ainda porque correspondem a um número muito reduzido de apólices (e consequentemente de unidades de risco).

Como é evidente, estas características apenas são avaliadas para efeitos de tarifa no momento da entrada na carteira ou da renovação da apólice, mantendo-se constantes para efeitos de prémio durante o período de vigência (1 ano civil, a não ser por cancelamento).

1.1. Estimação do modelo base

Procedeu-se então à estimação dos parâmetros pela máxima verosimilhança, no quadro dos modelos lineares generalizados com função de ligação logarítmica, por forma a manter a compatibilidade com a estrutura multiplicativa postulada.

Estando-se a analisar a frequência de sinistralidade em responsabilidade civil, considerou-se uma distribuição de Poisson, situação a partir da qual se procedeu

à estimação do modelo base que corresponde às variáveis incluídas na tarifa em vigor.

Em termos práticos, as estimações foram feitas utilizando, na maioria dos casos, um programa especialmente concebido para o efeito por forma a não só tirar partido da formalização adoptada como também a calcular os dois testes propostos no capítulo 4. Existem no entanto algumas excepções que correspondem aos casos em que não se recorreu a uma modelização baseada no modelo loglinear de Poisson, tendo-se então utilizado o programa GLIM, *Generalized Linear Interactive Modelling*, desenvolvido pelo grupo NAG, *Numerical Algorithm Group*.

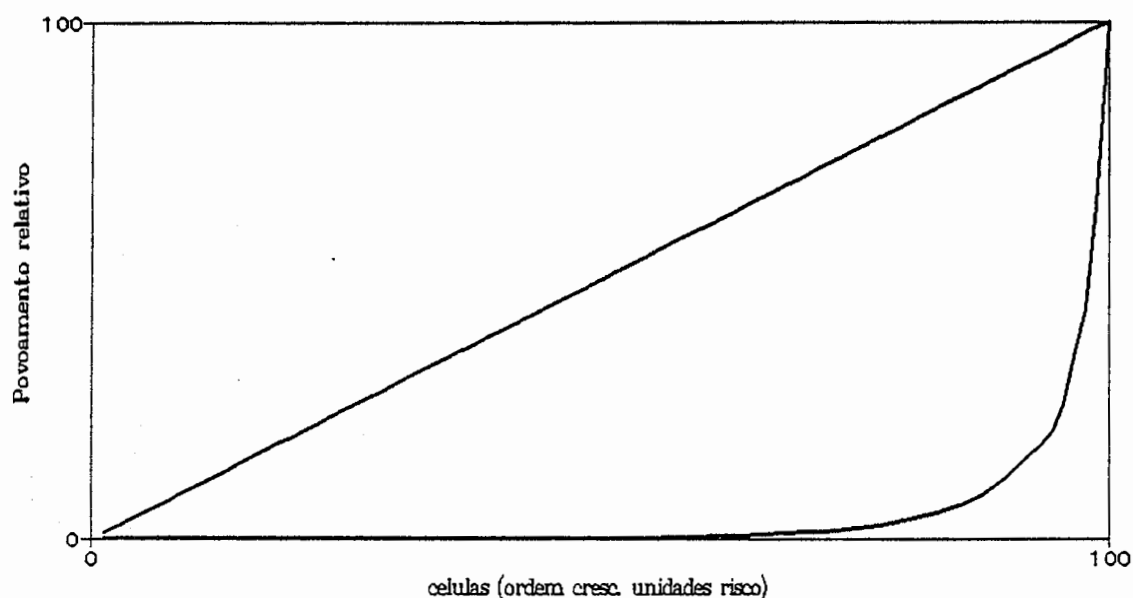
No quadro 9.1 referem-se os resultados obtidos quando se considera a carteira de 1987, a de 1988 e a carteira que resulta da fusão destas duas. Numa primeira coluna indicou-se o parâmetro que corresponde à taxa em vigor e que se tirou da publicação *Tarifa do Ramo Automóvel* editada pela Associação Portuguesa de Seguradores em 1987, referindo-se para cada uma das carteiras analisadas não só a variação percentual (que se designou por α_j) em relação à situação padrão como o valor absoluto do quociente entre a estimativa do parâmetro na equação linear e o desvio padrão desta mesma estimativa (que se referiu como z_j) o que, em termos da notação utilizada na apresentação dos modelos lineares generalizados (ver capítulo 4) se traduz por

$$\begin{cases} \alpha_j = 100 (e^{\beta_j} - 1) \\ z_j = \frac{|\hat{\beta}_j|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \end{cases}$$

A razão da apresentação dos α_j em vez dos β_j reside no facto dos primeiros permitirem uma leitura directa em termos de percentagens de agravamento a aplicar face à situação padrão. Por seu turno, os z_j permitem testar, embora de forma assintótica, a nulidade dos coeficientes respectivos pela simples comparação com os valores de uma distribuição normal standardizada.

Antes de comentar os resultados obtidos é necessário sublinhar ainda dois ou três aspectos essenciais sobre o povoamento das diferentes células. O primeiro

Gráfico 9.1 - Concentração no povoamento - Curva de Lorenz



comentário destina-se a referir que das 144 combinações teoricamente possíveis (se bem que uma dúzia delas seja de difícil de concepção prática) apenas se encontram preenchidos entre 81 e 90 casos ².

Para além disto o povoamento é extremamente irregular como se pode ver no gráfico 9.1 onde se representa uma curva de Lorenz referente à carteira global para traduzir a concentração do povoamento nas diferentes células. A situação é de tal forma extremada que existem 17 células com menos de 5 unidades de risco, uma com mais de 120 mil e correspondendo as 6 maiores a cerca de 80% da carteira, existindo ainda, nas células que abrangem apólices entradas a meio de cada ano, discrepâncias significativas entre o número de apólices e o número de unidades de risco presentes.

²No caso de se eliminarem os segurados com permanência inferior a um ano na carteira, estes valores cairiam ainda de algumas unidades.

Quadro 9.1 - Modelo base - Estrutura tarifária em vigor
- parâmetros em (%) de agravamento, eficiência em valor absoluto -

parâmetro	em vigor	1987		1988		global	
		α_j	z_j	α_j	z_j	α_j	z_j
condutores até 25 anos	20	33	8.04	25	6.74	28	10.36
carta há menos de 2 anos	20	59	10.06	73	14.37	67	17.75
fabricado há mais de 8 anos	20	-18	10.06	-13	7.70	-15	12.55
cil. entre 1501 e 2500 cm ³	13	31	10.58	27	9.78	29	14.37
cil. superior a 2500 cm ³	25	10	0.94	6	0.60	8	1.11
desconto	-30	-40	23.11	-30	17.59	-35	28.77
agravamento 1	15	1	0.35	18	4.37	9	3.43
agravamento 2	30	53	6.47	56	6.06	56	9.05
agravamento 3	45	111	6.91	134	7.06	123	9.97
agravamento 4	100	151	6.14	178	6.11	165	8.72
frequência padrão	-	9.45%		8.76%		9.05%	

Qualidade dos Ajustamentos

	1987	1988	Globais
nº de unidades de risco	167898.89	169935.76	337833.65
nº de células consideradas	89	81	90
Erro puro	61438.18	66231.40	127766.13
Deviance modelo individual	61561.84	66344.04	127953.01
Var. face ao modelo mínimo	1646.54	1338.99	2977.79
Deviance modelo agregado	123.66	112.63	186.89
Teste χ^2 modelo agregado	123.35	105.34	180.28

1.2. A qualidade dos ajustamentos

A primeira observação diz respeito ao elevado valor da “deviance” dos modelos agregados que, recorde-se, corresponde em termos assintóticos a uma χ^2 com um número de graus de liberdade igual à diferença entre o número de células e o número de parâmetros³. Estes valores, bem como os do teste do χ^2 ao modelo agregado, situam-se sempre na zona de rejeição, para níveis de significância admissíveis, e indicam que as médias estimadas nas diferentes células são significativamente diferentes das médias observadas. Uma análise cuidadosa dos contributos de cada célula para a “deviance” global mostra que não existe ligação entre os desvios mais significativos e o povoamento das células. Na sub-secção 1.3 adiantam-se elementos importantes para explicar esta situação.

Em segundo lugar, os resultados obtidos em termos do modelo individual sublinham as observações feitas no capítulo 4, isto é que o essencial da aleatoriedade é devido aos factores que se utilizaram na tarifa e não à modelização em si-mesma, pese embora o facto desta não apresentar aderência suficiente à realidade. A variação observada na “deviance” face ao modelo mínimo, e que em termos de teste estatístico corresponde a uma χ^2 com 10 graus de liberdade, mostra que os factores globalmente considerados contribuem de forma significativa para a explicação da frequência de sinistralidade em responsabilidade civil.

Tais conclusões, um pouco contraditórias, sublinham no fundo que as principais limitações se devem à omissão de variáveis significativas e salienta por outro lado as dificuldades em trabalhar com modelos cujo povoamento apresente tamanha irregularidade.

A análise da significância dos diferentes β_j pode ser feita recorrendo ao z_j , sublinhando-se dois casos problemáticos. Se parece, em termos estatísticos, que não existem razões significativas para autonomizar os veículos de cilindrada superior a 2500 cm³, já a correcção desta situação será mais problemática como se irá ver na subsecção 1.4.

O segundo caso, considerar ou não significativamente diferente do padrão

³Tenha-se presente que, nos modelos de Poisson, o parâmetro de escala está fixado no valor 1.

o agravamento a impor à primeira classe de malus, apresenta uma leitura mais problemática uma vez que se tiram conclusões diferentes nas duas carteiras base. A razão de tal comportamento deve-se essencialmente à elevada sinistralidade entre os segurados que entraram na carteira no decorrer de 1987, situação que originando uma elevação significativa no comportamento padrão (recorde-se que a classe correspondendo aos segurados com menos de 2 anos de permanência no sistema e sem participações até à última renovação foi definida como padrão) tende a reduzir o valor relativo dos agravamentos. Por outro lado, a situação em 1988 apresenta um comportamento mais regular, sendo talvez necessário proceder à observação de outro ano por forma a verificar que a situação ocorrida em 1987 foi de facto anómala.

Antes de se tecerem alguns comentários aos resultados obtidos, refira-se ainda que não se apresentam as estatísticas necessárias ao efectuar dos testes sugeridos no capítulo 4 por estes serem mais severos do que a simples análise da “deviance” e, dadas as discrepâncias entre médias estimadas e médias observadas nas diferentes células, não faria grande sentido pormenorizar a análise em termos do tipo de distribuição, com base em valores significativamente diferentes para o parâmetro da Poisson.

1.3. A introdução dos efeitos de interacção

Por forma a melhorar a “deviance” do modelo agregado e aproximar assim as médias estimadas das frequências observadas, as soluções geralmente preconizadas consistem ou na introdução de novos factores explicativos (eventualmente com a reformulação dos que já eram tidos em consideração) ou na introdução dos efeitos de interacção entre os factores considerados.

Uma análise do quadro 9.2, onde se representam os ganhos obtidos na “deviance” do modelo agregado quando se introduzem as interacções de primeira ordem ⁴, mostra que o caso mais interessante é sem dúvida constituído pela com-

⁴Os resultados referem-se à carteira global mas o comportamento é bastante semelhante nos dois anos em estudo.

Quadro 9.2 - Ganhos na “deviance” com a introdução das interacções

interacções consideradas	Deviance	g.l.	Ganho ¹	g.l.
Modelo base	186.88	79	–	–
idade seg. e anos de carta	184.11	78	2.77	1
idade veic. e cilindrada	186.06	77	0.82	2
idade seg. e sistema bonus	180.32	74	3.79	4
anos carta e sistema bonus	182.73	76	1.38	2
cilindrada e sistema bonus	176.72	69	7.39	9
idade veic. e sistema bonus	89.96	74	94.15	4

¹ Em relação ao modelo base. Este valor corresponde assintoticamente a uma estatística com distribuição do χ^2 com os graus de liberdade indicados

binação da idade do veículo com o bonus.

Se bem que a interacção entre a idade do segurado e os anos de carta seja, em termos estatísticos, de não rejeitar, os ganhos com a introdução das interacções entre idade do veículo e sistema de bonus são de tal forma espetaculares que se irá explorar esta situação de forma sistemática.

Curiosamente os coeficientes do modelo constituído pelos factores base mais os efeitos de interacção entre a idade dos veículos e a sua posição na escala de bonus conduzem a rejeitar a idade do veículo como factor autónomo, para além, claro está, de não aumentarem a significância do coeficiente referente às cilindradas mais importantes.

Retirando então este factor como elemento autónomo, ou seja mantendo apenas a sua interacção com o sistema de bonus, obtem-se a situação descrita no quadro 9.3. e que sugere que se recorra ao conceito de interacções reduzidas isto é que, face aos valores obtidos para os z_j , se considere apenas as interacções entre o factor idade do veículo e as duas classes constituídas pela categoria de bonus e pelo primeiro nível de agravamento.

Este conceito foi muito discutido em *Stroinski* [1987] que defendia o seu

Quadro 9.3 - Modelo com Interações

parâmetro	1987		1988		global	
	α_j	z_j	α_j	z_j	α_j	z_j
condutores até 25 anos	31	7.65	24	6.53	27	10.02
carta há menos de 2 anos	56	9.88	71	13.96	64	17.19
cil. entre 1501 e 2500 cm ³	31	10.40	28	9.82	29	14.41
cil superior a 2500 cm ³	7	0.66	6	0.59	8	1.08
desconto	-30	11.03	-21	8.11	-25	13.47
Agravamento 1	13	2.22	20	3.26	17	4.05
Agravamento 2	56	4.62	76	5.47	66	7.22
Agravamento 3	131	5.65	158	5.80	145	8.16
Agravamento 4	175	4.81	183	4.52	181	6.65
Sit ini. e carro com idade > 8	-3	0.84	-1	0.39	-1	0.68
Desconto e carro com idade > 8	-27	11.73	-23	10.05	-25	15.57
Agrav. 1 e carro com idade > 8	-21	3.54	-6	0.95	-14	3.25
Agrav. 2 e carro com idade > 8	-6	0.47	-22	1.76	-14	1.54
Agrav. 3 e carro com idade > 8	-18	0.92	-20	0.93	-19	1.31
Agrav. 4 e carro com idade > 8	-18	0.67	-5	0.15	-12	0.60
Frequência padrão	8.68%		8.26%		8.42%	

Qualidade dos Ajustamentos

	1987	1988	globais
nº de células consideradas	85	78	90
Var. face ao modelo mínimo	1659.0	1362.6	3074.7
Deviance modelo agregado	67.09	66.65	89.96
Teste χ^2 ao modelo agregado	74.26	60.32	82.81

grande interesse na modelização de tarifas, um pouco contra alguns autores que privilegiavam mais a aplicabilidade prática das tarifas em detrimento de aperfeiçoamentos estatísticos.

Uma abordagem seguindo este prisma deixaria em aberto, como se disse, os problemas inerentes ao factor cilindrada, passando-se a considerar um sistema de bonus conducente a uma tarifação diferenciada na classe de desconto e na primeira classe de agravamento com um esquema do tipo

	Veic. Novo	Veic. Antigo
Desconto	-25	-44
Agravamento 1	17	0

onde se representou os valores em percentagens de variação, seguindo o critério habitual (as estimativas baseiam-se na carteira global) . Sublinhe-se no entanto que a importância das interacções referentes à primeira categoria de agravamento não é tão clara uma vez que, em 1988, o teste baseado no z_j conduziria a sua rejeição (veja-se o quadro 9.3).

Uma solução deste tipo, não parecendo muito aceitável em termos de aplicação prática, permite no entanto compreender melhor as razões de um comportamento tão anómalo do factor idade do veículo. De facto a idade do veículo deve funcionar como substituto de variáveis como a quilometragem anualmente percorrida e talvez parcialmente de uma avaliação minimamente adequada da potência dos veículos, só assim se compreendendo as diferenças na propensão à sinistralidade nas classes de desconto e de menor agravamento.

Convém de qualquer forma não esquecer que também podem existir sérias limitações na capacidade do sistema de bonus em separar o trigo do joio, dada a sua fraca eficiência.

1.4. Crítica da tarifa em vigor

Não estando a tarifa em vigor baseada em nenhum modelo formalizado, a sua crítica não poderá ser feita recorrendo às hipóteses que a sustentariam, tendo antes

de se basear no confronto com os modelos estimados, pesem embora as limitações na qualidade das estimativas obtidas que foram comentadas no ponto anterior.

Tenham-se também presentes as observações feitas no ponto 1.1 sobre a estrutura da tarifa em vigor e sublinhe-se que, de qualquer forma, a comparação com os resultados que se obtêm com base numa estrutura aditiva não levaria a conclusões substancialmente diferentes como se poderá ver no ponto 1.5, nomeadamente no quadro 9.4.

Neste quadro o comportamento da tarifa actual, não sendo absurdo, apresenta no entanto um distanciamento importante em relação aos valores estimados⁵, podendo identificar-se 4 zonas de discordância.

A primeira, e mais grave, destas zonas reside na penalização imposta aos veículos com mais de 8 anos. A penalização de 20% deveria, em termos estatísticos, ser substituída por um desconto de cerca de 15%! Se é certo que um tal procedimento seria de difícil aplicação prática, parece razoável propor a neutralização desta variável, caso que será discutido na secção seguinte.

O segundo aspecto a abordar diz respeito ao binómio idade do segurado/tempo de carta já que estas variáveis apresentam um óbvia interacção. Se a tarifa prevê uma penalização idêntica para idades inferiores a 25 anos e carta de condução obtida há menos de 2 anos, a modelização apresenta maior discriminação, propondo um agravamento claramente superior para os anos de carta. Por outro lado obtêm-se penalizações muito superiores àquelas que foram definidas na tarifa.

Sublinhe-se no entanto as limitações destas variáveis já que, na maioria dos casos, se trata dos dados referentes ao segurado e não ao condutor habitual o que limita o alcance de ambas as variáveis.

⁵Como consequência deste distanciamento também se podem assinalar perdas significativas ao nível dos indicadores de qualidade do ajustamento que, como se viu, já indiciavam algumas deficiências na aderência dos modelos à realidade. Como exemplo pode referir-se que a "deviance" do modelo agregado para 1987 passa de 123.66 quando se estimam os parâmetros para 757.86 quando estes se encontram fixados nos valores em vigor. Sendo esta perda muito significativa, é curioso assinalar que a variação face ao modelo mínimo continua a indicar que esta situação é preferível à não introdução de discriminações na tarifa.

Em terceiro lugar, o comportamento do factor cilindrada contraria a noção intuitiva de manter uma variação de mesmo sentido entre tarifa e cilindrada. No entanto os dados disponíveis não permitem aprofundar este aspecto, nem tão pouco introduzir outras características dos veículos por forma a aferir das razões de um tal comportamento cuja justificação pode, por exemplo, residir no tipo de combustível ou apontar para a necessidade de substituir a variável cilindrada por outra avaliação da potência (na secção seguinte ensaiam-se as alternativas possíveis).

Por último, alguns comentários sobre o esquema de bonus/malus. Na quantificação das discriminações a introduzir por este sistema não se procedeu, como se disse, a nenhuma alteração apesar da sua eficiência poder registar melhorias significativas como se mostrou no capítulo 6, por forma a manter a situação vigente e obter estimadores comparáveis.

A comparação entre o modelizado e os valores em vigor mostra uma concordância aceitável para a classe de bonus com o único senão de incluir nesta categoria a esmagadora maioria dos riscos (veja-se o capítulo 8). Em termos dos diferentes níveis de agravamento, para além da sua ineficiência em termos práticos dado abrangerem um número diminuto de casos, assinala-se por um lado a situação peculiar da categoria de menor agravamento a que já se fez referência na subsecção anterior e por outro a brandura excessiva nas restantes categorias.

Tenha-se no entanto presente que, com as regras em vigor, um acréscimo nas penalizações a impor nestas classes do sistema originariam muito provavelmente como efeito perverso uma diminuição significativa do número de riscos abrangidos se se considerarem fenómenos como a sede de bonus.

1.5. Uma formulação baseada nos modelos aditivos

Por forma a ilustrar a discussão tida no capítulo 3 sobre as diferentes formas de modelizar a tarifa e para complementar os comentários feitos no ponto anterior apresenta-se, em termos muito sumários, os resultados que se obtêm quando se admite um modelo aditivo na formulação da tarifa.

Quadro 9.4 - Estrutura tarifária em vigor, modelo aditivo

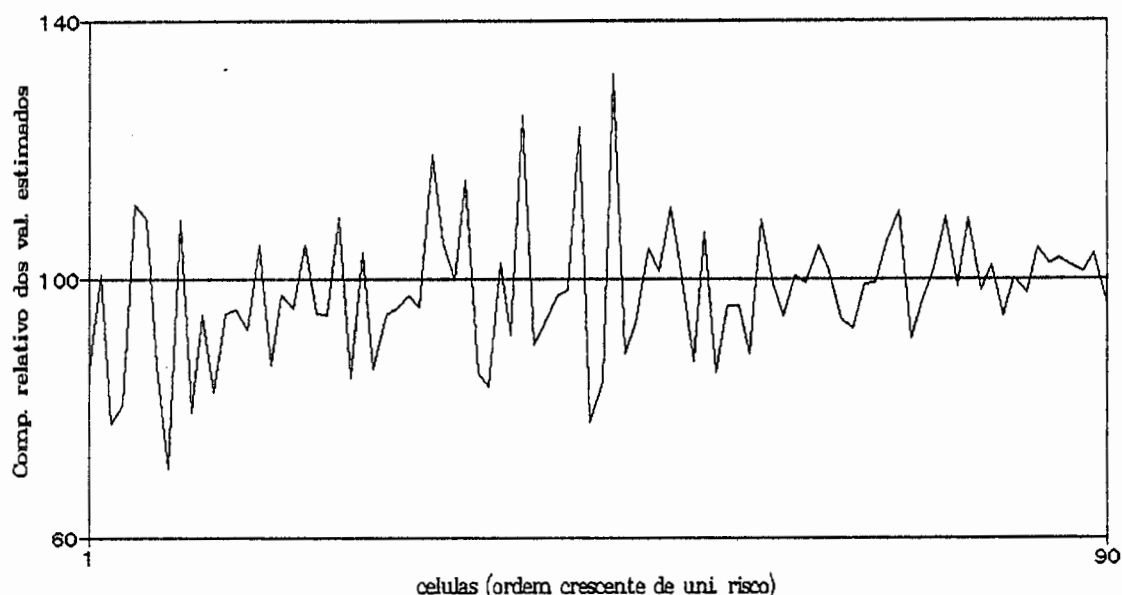
parâmetro	1987		1988		global		
	β_j	z_j	β_j	z_j	β_j	z_j	var ¹ (%)
condutores até 25 anos	2.52	6.81	1.99	5.92	2.23	8.97	24
carta há menos de 2 anos	5.65	9.14	6.61	12.18	6.19	15.18	68
fabricado há mais de 8 anos	-1.46	11.15	-1.20	9.08	-1.33	14.37	-15
cil. entre 1501 e 2500 cm ³	1.84	9.00	1.89	9.03	1.87	12.79	20
cil. superior a 2500 cm ³	0.70	0.97	0.45	0.61	0.58	1.13	6
desconto	-3.57	20.44	-2.57	16.37	-3.05	26.21	-33
agravamento 1	0.03	0.09	1.49	4.14	0.77	3.15	8
agravamento 2	4.92	5.40	4.68	4.81	4.88	7.34	53
agravamento 3	10.14	4.89	11.63	4.78	10.86	6.88	119
agravamento 4	13.83	3.99	15.78	3.86	14.76	5.58	161
frequência padrão	9.52%		8.87%		9.16%		

¹ A última coluna do quadro refere-se a variação percentual de cada factor face à situação padrão e foi construída por forma a obter valores comparáveis com os que constam do quadro 9.1.

Qualidade dos ajustamentos

	1987	1988	Globais
nº de células consideradas	89	81	90
Var. face ao modelo mínimo	1661.19	1359.41	3016.22
Deviance modelo agregado	109.43	92.63	148.36
Teste χ^2 modelo agregado	111.62	86.02	144.13

Gráfico 9.2 - Estimativas do modelo aditivo face às do multiplicativo



Os resultados obtidos constam do quadro 9.4, sendo de destacar que os ajustamentos apresentam valores e qualidade semelhantes aos obtidos com base no modelo multiplicativo mantendo-se portanto válidas as observações então formuladas. Curiosamente, enquanto os resultados em termos dos modelos no seu todo são ligeiramente melhores, a situação no que diz respeito aos parâmetros individualmente considerados é exactamente a oposta.

Em termos de interpretação dos coeficientes obtidos são necessárias algumas precauções uma vez que não se trata como anteriormente de percentagens de variação face ao padrão determinado. A média em cada célula é agora obtida somando os parâmetros que lhe correspondem à frequência padrão que, ela sim, é directamente comparável.

Para ilustrar este processo construiu-se o gráfico 9.2 em base semelhantes ao gráfico 9.1, isto é ordenando as células por ordem crescente de número de elementos e representou-se a frequência média por célula obtida pelo modelo aditivo em relação à taxa estimada por uma formulação multiplicativa que se fixou

no valor 100. O gráfico, construído com base nas duas carteiras globais, sugere variações significativas nas células com fraco povoamento e uma estabilidade bastante grande para os casos mais representativos. Recorde-se que as 6 células mais populosas (últimos casos) correspondem a mais de 80% do total das unidades de risco consideradas.

Apresentam-se por fim três situações que correspondem, nos dois primeiros casos, a duas das células mais representativas e, no último, a um caso extremo em termos do sistema de bonus por forma a visualizar as diferenças obtidas. Para cada caso, constroi-se um quadro onde se referem as frequências de sinistralidade estimadas (em percentagem) com base nos dois modelos e os valores efectivamente observados.

- Segurado com mais de 25 anos, carta de condução há mais de dois anos, cujo veículo tem mais de 8 anos e cilindrada até 1500 cm³ e com prémio bonificado (cerca de 120400 casos no conjunto das duas carteiras).

	1987	1988	Globais
Multiplicativo	4.69	5.31	4.99
Aditivo	4.49	5.10	4.78
Observado	4.48	5.03	4.73

- Segurado com mais de 25 anos, carta de condução há mais de dois anos, cujo veículo tem menos de 8 anos e cilindrada até 1500 cm³ e que entrou na carteira há menos de dois anos, não tendo ainda registado participações (cerca de 31500 casos no conjunto das duas carteiras).

	1987	1988	Globais
Multiplicativo	9.45	8.76	9.05
Aditivo	9.52	8.87	9.16
Observado	8.91	8.65	8.75

- Segurado com mais de 25 anos, carta de condução há mais de dois anos, cujo veículo tem mais de 8 anos e cilindrada até 1500 cm³ e classificado na

pior classe do sistema de bonus (cerca de 111 casos no conjunto das duas carteiras).

	1987	1988	Globais
Multiplicativo	19.58	21.19	20.33
Aditivo	21.89	23.45	22.58
Observados	16.67	26.67	20.72

2. Alterações nos factores considerados

Nesta secção discutir-se-ão as alterações que permitem, com base na informação disponível, melhorar a modelização da tarifa, não se abordando o sistema de bonus que será objecto do próximo capítulo.

2.1. Características do veículo

Se bem que as variáveis que traduzem as características técnicas dos veículos apresentem um comportamento merecedor de uma reflexão mais atenta, quer por indiciarem um desagravamento da sinistralidade para os veículos mais antigos que só encontra explicação no baixo poder de compra da população e na preservação de muitos veículo para circular esporadicamente, quer ainda por a variável cilindrada não ter um comportamento regular, as alterações que se irão analisar estarão dependentes dos dados ao nosso dispor.

Foi neste contexto que se definiram as alternativas possíveis para avaliar o peso dos ganhos e perdas na qualidade dos ajustamentos e as alterações nos diferentes coeficientes que as novas formulações induzem.

Antes de apresentar os modelos ensaiados uma observação ainda para sublinhar que existe uma contradição significativa entre os resultados de uma modelização estatística e aqueles que advêm da adaptação dos coeficientes a situações admissíveis em termos de mercado, nomeadamente no que diz respeito à antiguidade do veículo onde o divórcio é muito forte, mesmo procurando-se outras formulações para a estrutura do modelo (veja-se a secção anterior).

Quadro 9.5 - Alterações nas características dos veículos

- parâmetros em (%) de agravamento -

	modelo 1			modelo 2			modelo 3		
	1987	1988	global	1987	1988	global	1987	1988	global
cond. até 25 anos	33	25	28	33	25	28	32	24	27
carta há menos 2	59	73	67	60	74	67	56	70	64
fabricao 2 ¹	-17	-13	-15	-16	-12	-14	-	-	-
fabricao 3 ¹	-	-	-	-21	-19	-20	-	-	-
cilindrada 2 ²	30	26	28	32	28	30	29	25	27
cilindrada 3 ²	-	-	-	8	4	6	-	-	-
desconto	-39	-30	-35	-40	-30	-35	-41	-32	-37
agavamento 1	1	18	9	1	18	9	0	16	8
agavamento 2	53	56	56	53	56	55	53	55	55
agavamento 3	111	134	123	110	133	122	112	133	123
agavamento 4	150	177	164	147	176	161	151	177	164
frequência padrão	9.44	8.76	9.05	9.37	8.77	9.03	8.57	8.23	8.37

Qualidade dos ajustamentos

	modelo 1			modelo 2			modelo 3		
	1987	1988	global	1987	1988	global	1987	1988	global
nº de células	68	61	69	130	114	134	37	32	37
Var. face ao mod. mín.	1644	1336	2972	1669	1377	3038	1544	1277	2816
Deviance mod. agregado	105.2	90.6	160.7	164.9	165.6	249.0	30.2	12.6	20.0
Teste χ^2 mod. agregado	100.1	88.0	153.7	182.7	166.5	251.7	25.4	11.3	17.1

¹ Quando se considera apenas 1 categoria para além da classe padrão, como é o caso na tarifa em vigor, trata-se dos veículos com mais de 8 anos. No caso de se considerarem 2 classes nestas condições, a primeira corresponde aos veículos de 5 a 10 anos e a segunda aos casos com mais de 10 anos.

² Quando desagregadas, respeitaram-se as categorias definidas na tarifa tendo-se nos outros casos agregado os veículos com cilindrada superior a 2500 cm³.

Assim sendo ensaiou-se numa primeira fase a eliminação da classe de cilindrada mais elevada por agregação com a categoria intermédia e não, como seria mais indicado num prisma meramente estatístico, por incorporação na situação escolhida como padrão. Os resultados obtidos (ver quadro 9.5 coluna referente ao modelo 1) sublinham, por um lado que esta agregação não tem qualquer repercussão nas restantes variáveis e que, por outro lado, também não origina alterações significativas nos indicadores de qualidade do ajustamento, situação que se deve certamente ao facto da classe que se eliminou abarcar um número muito reduzido de unidades de risco.

O tratamento do outro factor referente às características do veículo foi um pouco mais complicado uma vez que não estava em causa a significância da desagregação feita mas sim a admissibilidade dos resultados.

Não querendo regressar ao tratamento deste factor com base nas interacções uma vez que não se obtém uma situação aceitável em termos de mercado, optou-se por considerar duas situações extremas.

Começou-se por analisar o seu comportamento como componente autónoma na explicação da frequência de sinistralidade, tendo-se elaborado o modelo 2 onde se procede à sua desagregação em três classes, classificação que parece a mais adequada.

A primeira observação a fazer diz respeito ao aumento significativo no número de células consideradas, o que traduz bem a forte presença de veículos mais velhos nas diferentes classes. Por outro lado é de assinalar um aumento significativo na variação da "deviance" em termos do modelo individual, aumento sem grande contrapartida em termos desta mesma estatística mas referente agora ao modelo agregado. Assinale-se ainda que os restantes coeficientes mostram uma boa estabilidade, não sofrendo alterações significativas.

Esta abordagem poderia ainda ser combinada com a introdução das interacções o que levaria certamente a um modelo bastante aceitável em termos estatísticos mas bastante difícil de ser implementado em termos práticos.

Por outro lado, baseando-nos em critérios de admissibilidade prática, construiu-

se o modelo 3 onde se procedeu à agregação das duas classes com cilindradas mais elevadas, para além de se eliminar o factor referente à idade dos veículos. Como seria de esperar, os resultados salientam uma degradação significativa do modelo em termos estatísticos, situação que se procurará corrigir melhorando as características do segurado que são consideradas pelo sistema tarifário.

2.2. Idade do segurado

O estudo do comportamento desta variável foi feito recorrendo a dois tipos de ensaios. Por um lado estudou-se a criação de novos grupos etários e por outro avaliaram-se os efeitos originados pela introdução da natureza do segurado - particular ou empresa - na definição deste factor.

O estudo do comportamento dos diferentes grupos etários que se desenvolveu no capítulo anterior recomendou a partição da carteira em 4 grupos, 18-20 anos, 21-25, 26-30 sendo o padrão definido pelos restantes casos (modelo 4). Os resultados penalizam os grupos mais jovens, seguindo uma progressão "natural", com excepção dos dois grupos mais jovens na carteira de 1988, problema que se liga com as taxas de sinistralidade muito diferentes para o grupo 18-20 anos nas duas carteiras. Registe-se ainda que esta nova definição do factor não origina impactos significativos nos restantes coeficientes.

Por outro lado, se é certo que o sistema em vigor prevê que se registe a idade do segurado ou do condutor habitual do veículo que constitui o objectivo que se pretende atingir com este factor, não é menos verdade que a esmagadora maioria dos registos diz respeito aos segurados e que, ao introduzir penalizações para certos grupos etários, induz-se também uma tendência à fuga que mais não faz do que escamotear o condutor habitual, quando a idade deste origina acréscimo no prémio, declarando-se um segurado de idade mais avançada.

Neste sentido as penalizações obtidas parecem ser razoáveis, não originando a sua aplicação um processo de fuga que obrigaria a entrar num complexo sistema de normas especiais (penalizações quando o condutor no momento do sinistro

pertence a determinado grupo etário e o condutor habitual do veículo, tal como consta na apólice, se encontrava num grupo mais favorável, etc ...).

Uma análise mais minuciosa do factor idade do segurado conduz desde logo a equacionar o grupo padrão já que comporta, à partida, 4 tipo de apólices bem diferenciadas:

- segurados com idade superior a 30 anos;
- empresas registadas como tal (10 ou mais veículos segurados);
- empresas com menos de 10 veículos;
- segurados e casos com informação omissa que correspondem, regra geral, a apólices antigas.

No caso das empresas, parece relativamente fácil manter a correção dos registos no que respeita ao segurado, procurando-se ensaiar se estes veículo têm um comportamento distinto do que seria de esperar.

Não se dispondo, como se sabe, dos dados mais adequados, utilizou-se como "proxy" o conceito de empresa que se encontra codificado. Introduziu-se numa primeira fase este factor no modelo em vigor (modelo 5), mantendo a desagregação em grupos etários que existe no modelo base, concluindo-se pela representatividade desta variável na tarifa e pelo forte amortecimento provocado nas classes de maior penalização do sistema de bonus. Tal fenómeno resulta das empresas terem peso importante nas unidades de risco que se encontram nestas classes.

Numa segunda fase compararam-se os coeficientes obtidos em cada um dos modelos parciais com aqueles que provêm da estimação do modelo conjunto, isto é desagregando os grupos etários e introduzindo a variável empresa (modelo 6). Os resultados são encorajadores, mantendo-se no entanto os problemas anteriormente identificados (nomeadamente aqueles que dizem respeito às características dos veículos) e cuja solução passa necessariamente por opções a serem tomadas fora do campo estatístico.

Quadro 9.6 - Alterações nas características dos segurados

- parâmetros em (%) de agravamento -

	modelo 4			modelo 5			modelo 6		
	1987	1988	global	1987	1988	global	1987	1988	global
seg. 18-20 anos	66	25	41	35	27	30	68	28	43
seg. 21-25 anos	31	28	30	35	27	30	33	32	32
seg. 26-30 anos	11	13	12	-	-	-	13	16	15
Empresas	-	-	-	81	87	84	84	91	87
carta há menos 2	52	71	63	60	75	69	53	73	64
fabrico > 8 anos	-18	-13	-15	-16	-11	-13	-16	-10	-13
cilindrada 2	32	28	30	30	25	27	31	26	28
cilindrada 3	11	6	9	8	5	7	9	6	8
desconto	-39	-29	-34	-40	-29	-35	-39	-28	-33
agavamento 1	2	19	10	0	17	9	1	19	10
agavamento 2	55	58	58	48	53	52	50	56	54
agavamento 3	113	137	125	102	121	112	104	123	115
agavamento 4	154	182	169	126	145	136	129	148	140
frequência padrão	8.86	9.28	8.56	9.24	8.44	8.78	9.03	8.20	8.55

Qualidade dos ajustamentos

	modelo 4			modelo 5			modelo 6		
	1987	1988	global	1987	1988	global	1987	1988	global
nº de células	150	138	156	123	114	125	184	171	192
Var. face ao mod. mín.	1666	1354	3006	1743	1492	3224	1765	1516	3264
Deviance mod. agregado	171.0	182.3	246.4	182.6	156.5	260.7	228.7	225.4	318.8
Teste χ^2 mod. agregado	181.1	174.1	247.1	174.0	140.4	243.2	230.7	212.6	314.1

2.3. A divisão regional

Tendo presente que a inclusão de novas variáveis não pode nem deve obedecer apenas a critérios estatísticos, sendo necessário por um lado justificar em termos de causalidade os resultados que se obtêm e por outro analisar os impactos em termos de mercado que a implementação das alterações originaria, utilizaram-se as diferentes alternativas construídas no capítulo anterior.

Os resultados obtidos (quadro 9.7) mostram a pertinência da introdução de uma variável regional quer esta se encontre definida em termos distritais quer numa base concelhia. Refira-se que se tomou sempre por padrão a região onde se incluem as áreas urbanas de Lisboa e Porto.

Em termos de impacto da variável regional nos restantes factores registam-se dois casos mais significativos; por um lado induzem um acréscimo na penalização dos segurados mais jovens e por outro provocam um amortecimento acentuado nas classes com agravamento da escala de bonus, se bem que se continuem a obter valores acima dos actualmente em vigor, à excepção da classe de menor agravamento, cuja autonomização face ao padrão se torna discutível ($z_j = 1.90$). Tenha-se no entanto presente que, ao seleccionar como padrão a região que compreende as áreas urbanas, se elevou a frequência que se utiliza como valor base.

3. A formulação de uma tarifa alternativa

Uma vez desenvolvidos os estudos parciais de cada um dos factores disponíveis, trata-se agora de proceder a uma abordagem conjunta por forma a concluir este capítulo apresentando um modelo mais adequado para descrever o comportamento dos segurados perante a frequência de sinsitralidade em responsabilidade civil.

Como se sublinhou no início do presente capítulo, apenas se discute a tarifa no quadro dos parâmetros então fixados, isto é considera-se o sistema de bonus como dado, à excepção do prémio a pagar em cada classe, não se abordando também a tradução dos comportamentos relativos em termos monetários, problemas que serão tratados nos capítulos seguintes.



Quadro 9.7 - Introdução de uma variável regional
- parâmetros em (%) de agravamento -

	modelo 7			modelo 8			modelo 9		
	1987	1988	global	1987	1988	global	1987	1988	global
condutores até 25 anos	37	28	32	38	28	32	38	28	32
carta há menos de 2 anos	59	75	68	59	74	68	59	74	68
fabricado há mais de 8 anos	-16	-11	-14	-16	-11	-13	-16	-11	-13
cil. entre 1501 e 2500 cm ³	30	26	28	30	26	28	30	26	28
cil. superior a 2500 cm ³	8	4	6	8	5	6	9	5	7
desconto	-39	-29	-34	-40	-30	-35	-40	-30	-34
agravamento 1	-2	14	6	-3	13	5	-3	13	5
agravamento 2	44	50	48	41	47	45	41	48	46
agravamento 3	96	119	108	91	116	104	92	117	105
agravamento 4	125	152	139	121	150	136	120	150	135
litoral A	-14	-19	-17	-33	-27	-30	-35	-31	-32
litoral B	-33	-33	-33	-37	-36	-37			
interior	-51	-49	-49	-52	-48	-50	-52	-48	-50
frequência padrão	11.2	10.4	10.7	11.5	10.3	10.8	11.5	10.4	10.8

Qualidade dos ajustamentos

	modelo 7			modelo 8			modelo 9		
	1987	1988	global	1987	1988	global	1987	1988	global
nº de células	287	262	300	281	260	294	219	202	230
Var. face ao mod. mín.	2185	1893	4063	2330	1943	4253	2329	1926	4237
Deviance modelo agregado	352.0	317.9	447.8	328.1	316.2	423.7	266.6	259.3	355.0
Teste χ^2 mod. agre.	355.4	310.6	444.3	329.8	322.9	413.8	265.3	253.7	348.7

Para a definição das regiões ver quadro 8.13. Tenha-se presente que a correspondência entre as regiões definidas nos modelos 7 por um lado e 8 e 9 por outro não é exacta.

3.1. Uma solução clássica

A alternativa mais evidente com base nos resultados obtidos consiste em seleccionar como elementos relevantes aqueles que mostraram melhor desempenho nas diversas análises parciais, com excepção da idade do veículo já que os resultados que se obtêm com este factor não são minimamente aplicáveis em termos de mercado.

Os resultados de uma tal abordagem constam do quadro 9.8, sendo de sublinhar que se mantêm as características já assinaladas, isto é uma discrepância apreciável entre os valores estimados e a frequência observada nas diferentes células. A variação da "deviance" face ao modelo mínimo permite no entanto concluir que os factores seleccionados contribuem para a explicação da sinistralidade mas de forma incompleta.

3.2. A definição de sistemas de bonus diferenciados

Por forma a aproximar os valores estimados dos valores observados nas diferentes células, já se apresentou na subsecção 1.4 a técnica baseada na introdução de interacções entre factores, limitando-se eventualmente estas interacções a algumas combinações entre níveis dos diferentes factores.

Seguindo esta via de análise, estudou-se o comportamento da deviance face ao modelo proposto na sub-secção anterior quando se introduzem as interacções entre as diferentes combinações dos factores, tomados dois a dois (ver quadro 9.9).

Estes elementos sublinham o interesse de cinco combinações que envolvem dois tipos de variáveis com graus de importância distintos. O primeiro grupo é composto pela variável regional e pelo sistema de bonus que se encontram envolvidos em todas as combinações seleccionadas e por outro um grupo constituído pela cilindrada do veículo, pelo grupo etário (eventualmente natureza) do segurado e pelo factor anos de carta.

Caso se inclua a combinação que provoca o maior decréscimo na "deviance" face à diminuição dos graus de liberdade, isto é as interacções entre sistema de

Quadro 9.8 - O Modelo Global

- parâmetros em (%) de agravamento -

	vigor	1987		1988		global	
Empresas	-	73	9.9	79	12.5	76	15.8
Segurados 18-20 anos	20	71	7.2	32	4.1	47	7.7
Segurados 21-25 anos	20	38	8.4	35	8.6	37	12.0
Segurados 26-30 anos	-	16	4.6	19	5.7	18	7.4
Carta \leq 2 anos	20	50	8.8	72	12.5	62	16.2
Cilindrada $> 1500 \text{ cm}^3$	13/25	27	9.6	24	8.8	25	13.0
Bonus	-30	-40	22.7	-29	16.2	-34	27.6
Agravamento 1	15	-4	1.0	14	3.5	5	1.8
Agravamento 2	30	39	5.0	47	5.2	44	7.4
Agravamento 3	45	87	5.8	109	6.1	99	8.5
Agravamento 4	100	105	4.8	127	4.9	116	6.9
Litoral	-	-34	20.4	-30	18.3	-32	27.3
Interior	-	-52	18.1	-48	17.3	-50	25.0
Frequência padrão	-	10.2%		9.3%		9.6%	

Qualidade dos ajustamentos

	1987	1988	global
nº de células	200	184	207
Var. face ao modelo mínimo	2353.31	2038.57	4371.42
Deviance modelo agregado	230.76	214.74	266.99
Teste χ^2 modelo agregado	222.76	197.58	247.52

Para a definição das regiões ver quadro 8.13.

Quadro 9.9 - Efeitos da introdução das interacções na "deviance"

	Deviance	g.l.	Δ	g.l.
Modelo base	266.99	193	-	-
idade com carta	261.57	189	5.42	4
idade com cilindrada	262.19	189	4.80	4
idade com sist. bonus	217.93	174	49.06	19
idade com Reg. Conc.	246.63	185	20.36	8
carta com cilindrada	266.62	192	0.37	1
carta com sist. bonus	262.75	190	4.24	3
carta com Reg. Conc.	252.40	191	14.59	2
cilindrada com bonus	265.91	188	1.08	5
cilin. com Reg. Conc.	259.93	191	7.06	2
bonus com Reg. Conc.	226.30	183	40.69	10

bonus e variável regional, obter-se-á um modelo cujo sistema de bonus poderá ser interpretado em termos regionais em vez de nacionais.

Dum ponto de vista prático, a principal dificuldade residirá no facto de muitos coeficientes referentes aos factores de interacção, assumindo embora valores relativamente elevados em termos dos α_j , apresentarem uma variabilidade muito grande, situação que origina valores de z_j que não garantem a significância das discriminações face ao padrão.

Se se considerarem como significativas apenas as interacções cujo z_j correspondente seja superior a 1.96, o modelo a reter corresponderá a um modelo clássico (isto é sem interacções) no qual se substitua o sistema único de bonus por um sistema de implantação regional. Neste quadro, os coeficientes principais corresponderão ao sistema a aplicar na região 1 (áreas urbanas e regiões autónomas) e na região 3 (interior), uma vez que neste último caso as interacções não são significativas, enquanto a região 2 terá um sistema alternativo, obtendo-se a estrutura que consta do quadro 9.10.

Se uma tal opção não parece muito fácil de implementar ela permite no entanto

Quadro 9.10 - Modelo com sistema de bonus diferenciado

- parâmetros em (%) de agravamento, dados globais -

	Regiões 1 e 3	Região 2
Empresas	76	
Segurados 18-20 anos	48	
Segurados 21-25 anos	37	
Segurados 26-30 anos	18	
Carta \leq 2 anos	63	
Cilindrada $> 1500 \text{ cm}^3$	25	
Litoral	38	
Interior	-53	
Bonus	-38	-28
Agravamento 1	0	21
Agravamento 2	37	57
Agravamento 3	80	170
Agravamento 4	84	315
Frequência padrão	9.96%	

sublinhar os efeitos diferenciados de fenómenos como a sede de bonus uma vez que uma parte significativa das diferenças nas penalizações a impor deve ter origem no facto dos sinistros serem menos onerosos no trânsito urbano, podendo assim o fenómeno de retenção desempenhar papel de maior relevo. A pobreza do sistema de bonus em vigor não permite no entanto desenvolver mais esta ideia.

Prosseguindo esta via de análise, construindo-se novos quadros de variação da "deviance", agora em função do modelo com interacção entre sistema de bonus e região de circulação, concluir-se-ia pela introdução de uma nova interacção entre a idade do segurado (incluindo aí a natureza deste) e o sistema de bonus, obtendo-se então um modelo com uma "deviance" de 178.02 para 164 graus de liberdade o que parece em termos estatísticos aceitáveis. Assinale-se ainda que, como seria de esperar face à experiência anterior muitos coeficientes vêm não significativos em termos do teste com os z_j .

4. Alguns comentários gerais aos resultados

Antes de discutir os resultados obtidos em termos da sua aplicabilidade ao mercado nacional, proceder-se-á ao seu comentário em função das conclusões tiradas noutros estudos. Recorde-se que, no capítulo 6, se procedeu a uma breve apresentação dos principais estudos empíricos existentes nesta área.

A primeira diferença que se deve assinalar é que a análise desenvolvida neste capítulo não só cobre dois anos como procurou, na medida do possível, ponderar as diferenças que se observaram entre as duas carteiras base enquanto os estudos assinalados apenas se debruçam sobre uma carteira anual.

Para além disso, também se incluíram as apólices que entraram em cada carteira no decorrer do ano em observação, ponderando-se evidentemente este facto na sinistralidade provocada enquanto o processo mais normal consiste em eliminar estas apólices da análise a efectuar. Este procedimento originou aliás algumas diferenças significativas nas conclusões tiradas, como se pode ver pela comparação entre os resultados referentes a 1987 neste estudo e aqueles que se indicam em

Andrade e Silva [1989], problema que se discutirá mais pormenorizadamente um pouco adiante.

Em relação a *Lemaire* [1985] existe um completo divórcio no que se refere à avaliação dos efeitos da idade dos veículos, para além do estudo deste autor tirar partido do mercado para o qual ele se dirige, definindo a variável regional em termos duplos, isto é por um factor linguístico e pelo grau de urbanização da zona de circulação habitual do veículo. Não sendo os coeficientes directamente comparáveis uma vez que *Lemaire* recorreu a um modelo linear aditivo clássico, não se pode deixar de sublinhar que os coeficientes correspondentes a estes factores assumem importância significativa pelo impacto que irão ter na definição do prémio.

Por outro lado o estudo de *Lemaire* confirma que a cilindrada não parece a forma mais adequada de avaliar a potência dos veículos, sendo claramente preterida pela avaliação directa da potência medida em cavalos din (mesmo tendo em conta que se conhecia o tipo de combustível utilizado), que se revela aliás como um dos factores mais significativos. Refira-se ainda que a natureza do segurado não se mostra um factor com capacidades discriminantes ao contrário do que acontece para Portugal.

A comparação com o estudo desenvolvido nos Países Baixos não fornece tantas indicações directas, uma vez que a sua espinha dorsal é constituída por um sistema de bonus com níveis de entrada diferenciados em função de critérios definidos à priori, como a idade do segurado, a sua experiência etc... No entanto é curioso assinalar que das duas únicas variáveis retidas para além do sistema de bonus, aquela que caracteriza o veículo é a sua classe de peso (factor que será retomado, embora como indicador parcial, em *Sundt* [1987]) enquanto o condutor é caracterizado por uma variável regional. Assinale-se no entanto que as variações provocadas pela estrutura regional são mínimas dado o peso assumido pelo sistema de bonus.

Em relação ao estudo feito para a carteira de 1987 onde se considerou apenas as apólices que permaneceram um ano completo em carteira, permite destacar como aspecto essencial o facto dos segurados que entraram na carteira no decorrer daquele ano terem registado uma sinistralidade extremamente elevada, fenómeno

que no entanto não se verificou em 1988.

Esta situação teve, como principal consequência, uma penalização muito mais forte nalgumas categorias que apresentam maior correlação com os segurados que entraram no sistema. Entre estes factores destaca-se a experiência como condutor, avaliada em termos do segurado possuir ou não carta de condução há mais de 2 anos, bem como uma elevação na frequência padrão de sinistralidade cuja consequência mais significativa foi de tornar a classe de agravamento 1 do sistema de bonus praticamente idêntica à classe inicial que se tomou por padrão. Como é natural nestas circunstâncias, regista um amortecimento nas outras classes de agravamento e um aumento do desconto a conceder.

Sublinhe-se ainda que a variável regional, embora definida em termos ligeiramente diferentes, mostra uma regularidade assinalável no seu comportamento atingindo valores muitos superiores aos obtidos nos Países Baixos, situação para a qual contribui certamente a ineficiência do nosso sistema de bonus.

Da análise feita ressalta, sem qualquer dúvida, a necessidade de se proceder a uma recolha sistemática de muito mais informações sobre as diferentes apólices procurando abranger aspectos essenciais como as características técnicas dos veículos (potência, peso, cilindrada efectiva, combustível utilizado entre outras), do uso que deles se faz (empresa e tipo de serviço, particular, quilometragem anual, etc..) e, se possível, uma melhor caracterização do segurado através da sua profissão nomeadamente.

Estas limitações na informação disponível tornam bastante problemática a comparação com os estudos similares feitos noutros países, para não falar da problemática da selecção de variáveis, já que no caso português o problema não reside na selecção das melhores variáveis mas sim em discutir o melhor aproveitamento que se pode fazer dos factores existentes.

Refira-se ainda que se não se abordou a problemática inerente à avaliação dos custos de cada sinistros nem tão pouco se procurou melhorar o sistema de bonus em vigor, assuntos que irão motivar os próximos capítulos.

Capítulo 10

Construção de um Sistema de Bonus Alternativo

Por forma a fundamentar a construção de um novo sistema de bonus, começa-se por apresentar, na secção 1, a situação existente em Portugal para, recorrendo ao instrumental definido no capítulo 5, mostrar a sua total inadequação face às necessidades impostas pela carteira.

Na secção 2, discutem-se as metodologias para definir um sistema de bonus quando se considera um modelo em que também existam factores directamente mensuráveis, como é geralmente o caso. Propõe-se então uma solução que permite conciliar os conceitos desenvolvidos na discussão dos sistemas de bonus com a filosofia inerente aos modelos lineares generalizados.

Não sendo possível aplicar uma tal metodologia com base na informação disponível, houve necessidade de simular uma carteira que, respeitando os elementos existentes, retratasse os efeitos originados pelo novo sistema a ser desenvolvido, problema que é tratado na secção 3.

Finalmente a secção 4 destina-se a comentar os resultados obtidos, discutindo-se a problemática inerente à opção por uma das duas escalas de variação regular. Neste ponto, após mostrar a semelhança de qualidade estatística entre os resultados, fundamenta-se a opção por uma escala de tipo geométrico tendo em conta a

sua maior simplicidade quer em termos de modelização quer em termos de interpretação (tenha-se presente que se admitiu sempre uma estrutura multiplicativa para o modelo), quer ainda em termos de implementação prática.

1. A situação existente

Se é certo que o sistema de descontos e agravamentos existente na tarifa em vigor não foi pensado em termos de um sistema de bonus, não é menos verdade que, com algumas alterações, se pode construir um sistema de bonus baseado na estrutura existente.

Tal processo, objecto de trabalho anterior (*Andrade e Silva [1988]*), apenas será retomado de forma aligeirada por forma a constituir um suporte que permita compreender os procedimentos que se irão desenvolver.

Na análise à eficiência do sistema, torna-se claro que a sede de bonus por ele induzida assume valores inoportáveis, sobretudo se se tiver em conta o número de classes existentes. Neste particular é de assinalar que tal fenómeno deriva sobretudo do facto de, após duas anuidades sem sinistros participados, se transitar para a única classe de bonus, independentemente da situação em que a apólice se encontre.

Este estudo mostra assim a necessidade de se construir um novo sistema de bonus que não somente reduza a amplitude de tal fenómeno como permita uma melhor separação entre os diferentes riscos assumidos pela seguradora.

ctionSistema de descontos versus sistema de bonus

A formalização do sistema em vigor em termos de um sistema de bonus tal como estes foram definidos no capítulo 5, é feita desdobrando as classes onde as apólices têm de permanecer 2 anos consecutivos sem originarem participações antes de poderem transitar para o nível inferior, obtendo-se então ¹:

¹Para mais pormenores, veja-se o trabalho citado onde se refere mais detalhadamente este sistema, indicando especificadamente a matriz das regras de transição, etc... Neste capítulo sublinhe-se apenas que, com o sistema em vigor, dois anos sem sofrer sinistros originam sempre a transição para a classe 1, qualquer que seja o comportamento anterior do segurado.

- classe 1 - Apólices com 30% de desconto - situação de bonus
- classe I_2 - Apólices sem desconto nem agravamento pelo 2º ano consecutivo
- classe I_1 - Apólices sem desconto nem agravamento pelo 1º ano
- classe 2 - Apólices com agravamento de 15% pelo 2º ano consecutivo
- classe 3 - Apólices com agravamento de 15% pelo 1º ano
- classe 4 - Apólices com agravamento de 30% pelo 2º ano consecutivo
- classe 5 - Apólices com agravamento de 30% pelo 1º ano
- classe 6 - Apólices com agravamento de 45% pelo 2º ano consecutivo
- classe 7 - Apólices com agravamento de 45% pelo 1º ano
- classe 8 - Apólices com agravamento de 100% pelo 2º ano consecutivo
- classe 9 - Apólices com agravamento de 100% pelo 1º ano

A principal limitação deste sistema consiste no facto de, quando interpretado em termos de uma cadeia de Markov, esta ser redutível já que a classe I_1 não é atingível de nenhuma das outras e que se chega à classe I_2 apenas vindo da classe I_1 .

O processo seguido consistiu então em eliminar as classes I_1 e I_2 passando-se a trabalhar com um sistema com apenas 9 classes, sendo necessário definir a classe inicial k , uma vez que esta passou a ser aleatória na medida onde dependerá do comportamento do segurado nos dois primeiros anos de vigência da apólice no sistema. No quadro 10.1 apresentam-se, a título indicativo, as probabilidades associadas à localização de uma apólice no início do seu terceiro ano de permanência no sistema, para diferentes taxas de sinistralidade, admitindo-se que o número de participações segue uma lei de Poisson.

Quadro 10.1 - Posição após duas anuidades na carteira

Probabilidades em %

	6%	8%	10%	15%	20%
classe 1	88.69	85.21	81.87	74.08	67.03
classe 2	5.32	6.82	8.19	11.11	13.41
classe 3	5.32	6.82	8.19	11.11	13.41
classe 4	0.16	0.27	0.41	0.83	1.34
classe 5	0.48	0.82	1.23	2.50	4.02
classe 6	0.00	0.01	0.01	0.04	0.09
classe 7	0.02	0.05	0.10	0.29	0.63
classe 8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
classe 9	0.00	0.00	0.01	0.02	0.07

1.1. Eficiência e escalas óptimas

A pouca eficiência deste sistema, mesmo depois de “normalizado” em termos de uma cadeia de Markov não redutível, fica-se a dever mais às regras de transição do que à restrição adicional de existir um prémio idêntico para grupos de 2 classes, com excepção da categoria 1.

Tal conclusão pode ser tirada com base nos elementos constantes no gráfico 10.1, onde se representa a eficiência do sistema de bonus existente e dos sistemas optimizados que se podem construir com base nas regras em vigor, e no quadro 5.2 onde se mostra que, com um sistema compreendendo 9 classes, se podem obter eficiências muito próximas dos 20%, isto é indiscutivelmente superiores.

Saliente-se ainda que o gráfico 10.1 permite sublinhar o comportamento óptimo da escala Bayes, mesmo quando avaliada pelo critério de Lemaire, que apenas é ultrapassada quando se escolhe $k = 9$, bem como visualizar a grande sensibilidade das escalas linear e geométrica à escolha da classe inicial k . Se tal facto era esperado da escala geométrica já o mesmo não se pode dizer da escala linear.

Refira-se ainda que a escala em vigor mantém uma grande regularidade face

Gráfico 10.1 - Eficiência das regras em vigor

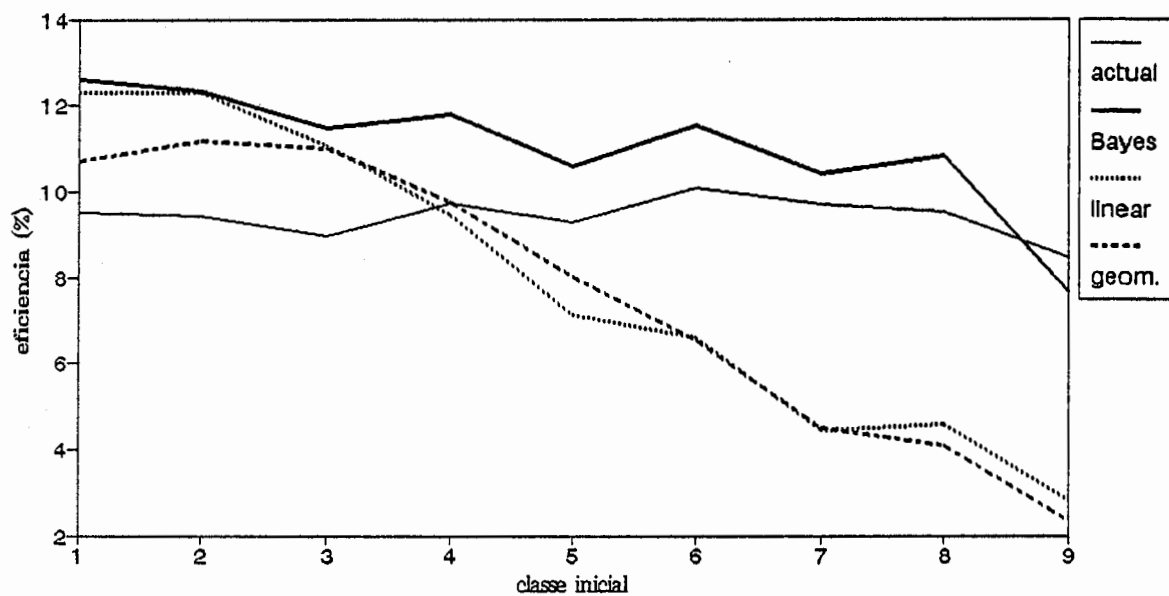
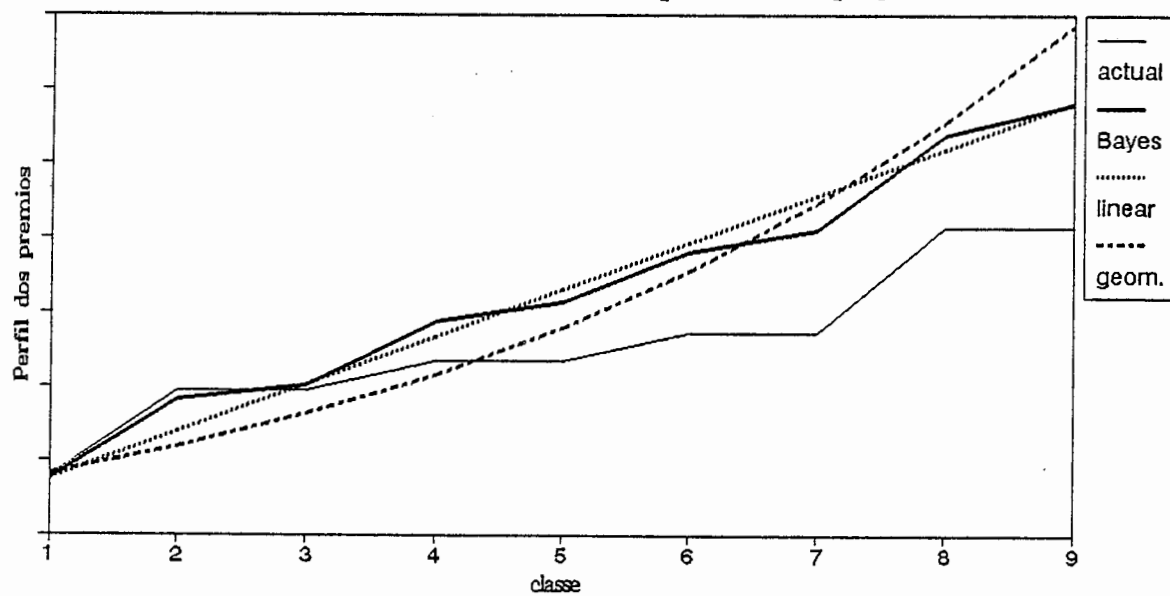


Gráfico 10.2 - Perfil dos prémios a pagar



à escolha da classe inicial se bem que, para os casos mais interessantes, se fique longe das escalas optimizadas.

Como curiosidade, apresenta-se o gráfico 10.2 onde se representa o perfil dos prémios a pagar nas diferentes classes do sistema de bonus admitindo-se $k = 1$ já que parece o valor mais aceitável face à situação existente (ver quadro 10.1).

1.2. Sinistralidade observada e sinistralidade real

Como se sabe, uma das consequências mais evidentes da introdução dos sistemas de bonus consiste na não declaração à seguradora dos sinistros envolvendo pequenos custos para não sofrer penalizações futuras no prémios, fenómeno que se designou por *sede de bonus*.

Na análise das participações feitas, observar-se-á um número bastante menor de sinistros do que os efectivamente ocorridos registando-se por outro lado custos médios superiores uma vez que os sinistros não declarados serão aqueles com custos mais reduzidos.

Supondo-se então um comportamento racional por parte dos segurados e ignorando-se o impacto dos factores mensuráveis à priori, procurou-se determinar qual a frequência real de sinistralidade que originaria uma frequência observada semelhante àquela que se depreende da análise da carteira. Para tal admitiu-se uma distribuição lognormal para os custos com desvio-padrão 4 vezes superior à média pelas razões já referidas anteriormente, nomeadamente no capítulo 5.

Escolhendo como carteira base a de 1987 para abranger o maior número possível de sinistros encerrados, adoptou-se como prémio para as diferentes classes do sistema de bonus aquele que corresponde ao capital mínimo obrigatório a segurar em responsabilidade civil naquele ano, ou seja partiu-se do valor base assim estabelecido (veja a publicação *Tarifa de Automóveis* editada pela Associação Portuguesa de Seguradores) e aplicaram-se os descontos ou penalizações previstos.

Tal premissa não deverá andar muito longe da situação que vigorava então, uma vez que a esmagadora maioria dos montantes seguros em responsabilidade civil correspondem aos mínimos obrigatórios.

Quadro 10.2 - Percentagem de sinistros não declarados

freq real	custo tipo	classes do sistema									Média	freq obs
		1	2	3	4	5	6	7	8	9		
10%	1	45.5	52.7	40.9	59.2	47.1	70.2	61.7	70.2	52.6	45.7	5.43
	2	42.7	50.0	38.2	56.6	44.4	67.7	59.0	67.7	49.8	42.9	5.71
	3	40.2	47.4	35.9	54.2	42.0	65.5	56.5	65.5	47.2	40.5	5.95
	4	38.0	45.2	33.8	52.0	39.9	63.3	54.2	63.3	44.9	38.3	6.17
	5	36.1	43.2	32.0	49.9	38.0	61.3	52.1	61.3	42.8	36.3	6.37
12%	1	45.3	52.7	41.0	59.4	47.4	70.2	61.5	70.2	52.4	45.6	6.52
	2	42.5	50.0	38.3	56.8	44.7	67.7	58.8	67.7	49.5	42.9	6.85
	3	40.1	47.5	35.9	54.4	42.4	65.4	56.3	65.4	47.0	40.4	7.15
	4	37.9	45.2	33.9	52.2	40.2	63.3	54.0	63.3	44.7	38.3	7.41
	5	35.9	43.2	32.0	50.2	38.3	61.3	51.9	61.3	42.6	36.3	7.64

Admitiu-se para os custos uma distribuição lognormal com coeficiente de variação igual a 4 sendo o custo médio de 43.5, 48.9, 54.4, 59.8 ou 65.4 mil escudos para o o custo de tipo respectivo.

Para o custo médio envolvido admitiram-se as 5 alternativas que constam do quadro 10.2, recordando-se que o valor médio observado para os sinistros participados anda um pouco acima dos 90 contos, valor que, como tudo leva a crer, deve ser superior ao valor médio realmente existente, devido à sede de bonus.

Os resultados obtidos constam do quadro 10.2 e permitem tirar como conclusão básica que os limites de retenção óptimos em cada classe dependem, no essencial, dos prémios em vigor nas diferentes classes e não do custo médio associado aos sinistros, nem mesmo da frequência global de sinistralidade, pelo menos dentro de certos limites. De facto, os resultados obtidos mostram, para a mesma classe, variações inferiores à dezena de escudos.

Referem-se, como curiosidade, os limites obtidos numa das situações, sendo os valores referidos em milhares de escudos

[8.0 11.0 6.6 14.6 8.7 23.9 16.0 23.9 10.89]

Saliente-se ainda a perfeita simetria de situações nas classes 6 e 8 o que origina limites de retenção obrigatoriamente iguais.

De forma complementar, com o aumento do custo médio associado aos sinistros, e dado que os limites de retenção se mantêm constantes, assiste-se naturalmente a uma diminuição da percentagem de sinistros não declarados como se pode ver no quadro 10.2, sendo de referir que as taxas globais de retenção foram calculadas supondo que a proporção de segurados em cada uma das classes correspondia à distribuição estacionária da cadeia de Markov.

Multiplicando a taxa de sinistros declarados pela frequência admitida, obtém-se a frequência observada que, no caso de ser correcta a taxa global postulada, deverá corresponder à frequência de sinistralidade efectivamente observada na carteira (veja-se o quadro 8.1). Como é evidente todo este raciocínio pressupõe um comportamento perfeitamente racional por parte dos segurados, hipótese que fica por confirmar.

Neste contexto, a taxa de sinistralidade efectivamente verificada deverá situar-se entre os 10 e 12%, mantendo assim plena validade o estudo desenvolvido no capítulo 5.

2. Metodologias para definir um sistema de bonus

Sendo uma área em que não existem referências bibliográficas dignas de registo já que os sistemas em vigor nos diferentes países correspondem à introdução de correcções a partir de um modelo base e não à formulação global de um sistema, o processo que se irá seguir foi pensado em função da situação existente em Portugal pese embora o facto de poder constituir um ponto de partida para a necessária adaptação a outras situações.

Das várias hipóteses surgidas, privilegiaram-se duas possíveis metodologias que se apresentam nas subsecções 1 e 2 e que correspondem no fundo aos dois extremos do problema em análise; enquanto a primeira abordagem constitui uma extensão do estudo desenvolvidos para analisar a prestação dos sistemas de bonus

sofrendo dos defeitos e virtudes destas metodologias a segunda abordagem baseia-se nos modelos lineares generalizados e pretende otimizar os resultados não face ao sistema de bonus em si mas perante os resultados obtidos na estimação do comportamento relativo dos segurados.

Antes de apresentar estas metodologias torna-se necessário tecer dois ou três comentários sobre as implicações da definição de um novo sistema de bonus no processo de estimação da tarifa.

Como se viu no capítulo 5, um sistema de bonus pode caracterizar-se pelo terno (T, k, π) uma vez estabelecido o número de classes K deste sistema. O aspecto essencial a ter presente consiste no facto de alterações nas várias componentes do sistema originarem impactos bem diferentes na estimação da tarifa.

Assim enquanto a modificação da classe inicial k apenas terá repercussões menores cujo impacto se fará principalmente sentir noutros factores correlacionados como a idade dos segurados ou a sua experiência como condutores avaliada pelo número de anos com carta de condução, já o mesmo não se poderá dizer de alterações nos restantes elementos, muito embora a modificação do vector π constitua uma situação intermédia entre os outros dois casos.

De facto uma modificação do vector π poderá originar dois tipos de consequências; por um lado implicar mudanças noutros parâmetros por correlações entre estimativas, sobretudo se se alterar a estrutura do vector uma vez que a unidade de medida é, nesta fase, irrelevante e por outro lado originar um nível diferente de sinistralidade observada se se tiver em conta a sede de bonus. Este último aspecto pode ser avaliado, pelo menos de forma parcial, no quadro de um modelo mais restrito ao calcular-se a taxa real a partir da taxa observada (ver secção anterior), trabalhando-se então com esta última para, se necessário, re-introduzir uma taxa observada estimada numa fase posterior. As principais limitações a este nível residem quer no cálculo da taxa real, uma vez que este se baseia na hipótese dos segurados terem uma atitude otimizada perante o sistema, quer numa maior dificuldade em aplicar uma metodologia globalizante (veja-se a subsecção 2.1 do presente capítulo).

A situação mais complexa será sem dúvida uma alteração do número de classes

do sistema e/ou das regras de transição T . Como a análise do sistema é baseada no comportamento passado dos segurados torna-se necessário reconstruir a situação em análise, admitindo-se que vigorava o novo sistema. Se este processo de simulação do universo em estudo pode ser encarado, teoricamente pelo menos, de forma quase determinística ele virá quase certamente a complicar-se por falta de informação.

O primeiro aspecto pode ser visto de forma semelhante ao que se descreveu no caso de alterações no vector π apresentando no entanto como problema adicional a transição de classes entre sistemas distintos. A solução mais evidente de admitir que o novo sistema está em vigor há já um número suficiente de períodos para que se esteja numa situação próxima da distribuição estacionária obriga a recuar muito para trás no tempo para além de se ter de admitir um universo onde não existe sede de bonus. É precisamente esta necessidade de recuar no tempo por um período bastante largo ² que conduz a uma situação onde muito provavelmente se verificarão grandes lacunas na informação disponível. Se bem que o estudo do caso português sofra bastante com este fenómeno, neste como noutros pontos, será difícil encontrar registos exaustivos sobre suporte magnético para um período de tempo tão longo quanto o necessário. Na secção 3 voltar-se-á a abordar esta problemática apresentando-se então o processo seguido para ultrapassar este impasse, admitindo-se por ora que se dispõe de tais registos.

Assim sendo, estar-se-á em condições de, dado um sistema de bonus ou melhor dada a classe inicial k e as regras de transição T , proceder a construção de uma carteira simulada que permita estimar a tarifa nos termos em que este processo foi desenvolvido no capítulo anterior.

Para tal começa-se por enquadrar as possíveis abordagens, referindo-se duas situações extremas. Enquanto a primeira solução privilegia claramente o estudo autónomo do sistema de bonus já que se adaptam os restantes factores tarifários às variações nos prémios determinadas por este sistema, a segunda abordagem

²Se bem que o valor exacto dependa quer do sistema quer da distância que se fixe como razoável face à distribuição estacionária o seu valor deverá ser, na maioria dos sistemas com um mínimo de adequação a situações reais, de pelo menos 10 anos.

procura um maior equilíbrio entre todos os factores tarifários determinando as variações no sistema de bonus com base numa estimação simultânea de todos os coeficientes.

2.1. O sistema de bonus como "offset"

Como se disse esta metodologia baseia-se na generalização daquela que se utilizou no estudo autónomo dos sistemas de bonus e corresponde no fundo à ideia de que, se se vai analisar o comportamento dos sistemas com base em determinada metodologia, parece adequado seleccionar desde logo o melhor sistema como sendo aquele que optimiza o critério escolhido.

Como é evidente uma visão tão estreitamente ligada aos critérios de qualidade pode ser temperada pela definição de restrições à priori sobre o sistema quer estas actuem sobre a escala de prémios (caso das escalas lineares e geométricas) quer sobre outro ponto qualquer do sistema.

A característica base deste tipo de abordagem consiste em tratar a carteira como um todo, não tendo em conta a existência de características mensuráveis que permitam uma melhor caracterização dos riscos envolvidos.

Trata-se então de efectuar um estudo semelhante àquele que se desenvolveu no capítulo 5, seleccionando-se o sistema de bonus a implementar como um todo, o qual se irá incorporar no modelo a estimar.

Uma vez escolhido o sistema de bonus, tratar-se-á, após ter simulado a carteira a estudar, de estimar os restantes parâmetros referentes ao comportamento relativo dos diferentes segurados em termos de tarifa tendo em conta o sistema seleccionado.

A introdução desta condicionante terá efeitos a dois níveis distintos. Por um lado aqueles que são inerentes à construção de uma situação simulada, e que já se apresentaram e por outro a fixação do vector dos prémios a pagar irá traduzir-se na introdução de restrições adicionais entre diferentes parâmetros β_j na componente linear dos modelos lineares generalizados. As eventuais complicações que

possam daí advir serão em tudo semelhantes às originadas pela fixação exógena de quaisquer parâmetros na referida equação.

2.2. Uma solução alternativa

Se uma visão baseada nos factores directamente mensuráveis não parece minimamente adequada por obrigar a definir um sistema de bonus para cada célula, é no entanto claro que a introdução destas variáveis, e a consequente divisão da carteira, origina uma menor variabilidade no comportamento dos segurados perante os elementos que se pretendem avaliar com o sistema de bonus.

Em consequência disto parece natural que a abordagem global que se apresentou na subsecção anterior tenda a sobre-estimar as diferenças de comportamento imputáveis aos factores que não são directamente observáveis e leve à construção de um sistema de bonus demasiado extremado face ao desejável. É claro que, na metodologia anterior, existia um mecanismo indirecto de correcção uma vez que, ao estimar os coeficientes a aplicar aos factores mensuráveis, se tinha em conta os valores postulados para o sistema de bonus.

Por forma a proceder à correcção desta situação nos coeficientes de penalização a introduzir no sistema de bonus e não de forma indirecta nas outras variáveis, desenvolveu-se uma solução mista que consiste em extrair do estudo global quer o número de classes do sistema quer as regras de transição a aplicar quer ainda a classe inicial k . Num segundo tempo recorre-se a estes elementos para estimar, com base nos modelos lineares generalizados, os coeficientes a aplicar às diferentes variáveis envolvidas, incluindo os coeficientes do sistema de bonus.

Este sistema, além de apresentar uma maior adequação entre o estimado e o observado, permite também que se considerem outros elementos na escolha do sistema a importar, nomeadamente que se possa ter em conta a menor dispersão de comportamentos que advem de se considerarem também factores directamente observáveis.

Refira-se por último que um tal procedimento é particularmente interessante no caso dos sistemas de variação regular (sistemas linear e geométrico) uma vez

que se traduz pela existência de um parâmetro referente ao sistema na estrutura a ser estimada.

3. A construção da carteira simulada

Não se dispondo, como se referiu no início da secção anterior, da informação necessária para se construir a carteira em estudo, caso vigorasse um sistema de bonus diferente, houve necessidade de desenvolver uma metodologia específica para responder a este problema numa situação tão limitada como aquela que se está a analisar.

A solução a que se recorreu consiste, com base na informação disponível sobre cada uma das apólices da carteira, em reconstruir as participações feitas pelos segurados desde 1982, data a partir da qual se possuem alguns elementos. Na impossibilidade de uma determinação exacta das participações em cada um dos anos, simular-se-ão as ocorrências, mantendo-se no entanto plena compatibilidade com os elementos conhecidos.

Com base nesta carteira simulada, aplica-se, ao longo dos anos para os quais se dispõe de informação, as regras de transição do sistema de bonus a testar obtendo-se então a posição das diferentes apólices no sistema para os anos em estudo. Este procedimento não levanta problemas teóricos, tendo sido aplicado recorrendo a um programa especificamente construído para o efeito.

Para melhor compreender o procedimento adoptado, recorde-se a informação disponível, após tratamento e cruzamento de dados entre os diversos ficheiros, no que respeita aos elementos com implicações no processo em discussão:

- Início declarado - Trata-se, na grande maioria dos casos, do ano de entrada da apólice no sistema existindo no entanto algumas situações incongruentes que resultam da apólice ter transitado de segurados, nomeadamente de pais para filhos e que se procurou corrigir.
- Sinistros no período 1982-84 ou mais precisamente até à data de renovação no ano de 1984. No caso da apólice não figurar na carteira no início do

período ter-se-á evidentemente de adaptar a situação, observação essa que se mantém válida para os outros casos de idêntica natureza.

- Sinistros no período 1984-85 começando o período na data de renovação de 1984 e cobrindo o ano todo de 1985.
- sinistros 1986 e a partir daqui para todos os anos conhecendo-se inclusivamente para muitos casos as ocorrências nos sub-períodos definidos pela data de renovação das apólices.

Construiu-se então um programa para distribuir os sinistros que se sabem ter ocorrido num período compreendendo diversas anuidades por cada uma delas, respeitando a proporcionalidade no tempo de exposição ao risco e o número global de sinistros observados. No caso dos anos civis se encontrarem divididos pela data de renovação da apólice, somaram-se estes dois sub-períodos por forma a uniformizar os resultados com base nos diferentes anos civis.

Uma vez estabelecida a estrutura que, como facilmente se depreende, dependerá do acaso para a distribuição dos sinistros dentro de cada grupo, sendo portanto diferentes em cada corrida, aplicam-se as regras de transição do sistema de bonus que se está a analisar admitindo-se a entrada da apólice no sistema em 1 de Janeiro de 1982, ou em data posterior caso seja a situação real.

Após obter a posição das apólices no sistema de bonus em 1987, estabelece-se a situação para 1988, obtendo-se então duas carteiras semelhantes às que se estudaram no capítulo anterior mas com a particularidade de simularem a aplicação de um novo sistema de bonus.

Refira-se também que este método admite uma uniformidade de comportamento do segurado, em termos probabilísticos pelo menos, nos intervalos que não se conseguem desagregar para além de três outras limitações mais significativas:

- As participações nem sempre correspondem a sinistros em responsabilidade civil, notando-se alguma divergências entre os ficheiros de sinistralidade e o acumulador presente no ficheiro de carteira. No entanto tais diferenças são

relativamente pequenas sendo previsível que não assumam um peso preponderante nos resultados obtidos.

- Com a imposição de um sistema de bonus diferente será natural que a percentagem de sinistros não participados sofra também as modificações significativas, fenómeno que não pode ser tido em consideração.
- Teve de impor-se a data de 1 de Janeiro para a entrada de todas as apólices que se sabe pertencerem à carteira antes daquela data. Mas, não se conhecendo a sinistralidade anterior àquela data, não restou outra alternativa.

4. O estudo da carteira

Antes de aplicar as metodologias que se descreveram à carteira que se está a analisar, torna-se necessário seleccionar um sistema de bonus, mesmo que apenas de forma parcial.

Como se disse, o estudo desenvolvido no capítulo 5 para ilustrar os diferentes sistemas de bonus mostra-se plenamente compatível com os dados observados, permitindo assim que se recorra a ele para seleccionar os elementos necessários do sistema a implementar, processo que se apresenta na primeira subsecção.

Com base nesta selecção, implementou-se a metodologia que foi descrita nas secções anteriores, analisando-se então as situações que parecem apresentar maior interesse. Enquanto na subsecção 4.2 se definem estes casos e se pormenoriza o processo de fixação à priori do sistema de bonus em termos da estrutura dos modelos lineares generalizados, a subsecção 4.3 destina-se a discutir os resultados, fundamentando-se então a opção em termos de uma escala geométrica.

Assinale-se ainda que houve o cuidado de efectuar diversos ensaios partindo de geradores aleatórios distintos por forma a avaliar a amplitude de possíveis variações baseadas na aleatoriedade inerente ao processo de construção das carteiras a analisar.

No entanto, dado que as variações obtidas em termos dos resultados estimados não assumiram relevo significativo, apenas se apresentam resultados referentes a um dos ensaios que se podem considerar representativos do conjunto obtido.

4.1. A escolha de um novo sistema de bonus

Como já se disse repetidamente, o primeiro passo deverá consistir na escolha de alguns elementos fundamentais do sistema de bonus com base num estudo preliminar.

No caso presente, e dado que a abordagem desenvolvida no capítulo 5 mantém plena validade face à realidade portuguesa, foi relativamente fácil optar por um sistema de bonus com 15 classes cujas regras de transição se baseiem nos dois pontos seguintes:

- Cada ano sem participações origina a passagem à classe inferior, a não ser que se esteja na classe 1, situação onde se permanece nesta classe.
- Por cada participação, sofre-se uma penalização de 4 classes até atingir a classe 15 a partir da qual não existem penalizações adicionais.

Dentro deste referencial estudar-se-ão as escalas geométrica e linear, fixando a classe inicial em $k = 5$, pese embora o facto de, para a escala geométrica ser mais aconselhável seleccionar $k = 6$. O motivo principal de tal escolha reside no facto de apenas se conseguir identificar a sinistralidade das diferentes apólices a partir de 1982, e consequentemente a escolha de um valor de k superior a 5 impossibilitaria a presença de segurados na classe 1 no ano de 1987.

4.2. A implementação do estudo

Os estudos feitos com base nas carteiras simuladas incidiram sobre as três situações que parecem mais interessantes, isto é

- Situação 1 - Apenas se considera o sistema de bonus, não se envolvendo no modelo qualquer outro factor. Esta situação servirá não só para avaliar o sistema de bonus em si mesmo como também para comparar os parâmetros obtidos com aqueles que se depreendem da abordagem desenvolvida no capítulo 5.
- Situação 2 - Para além do sistema de bonus também se incluem os factores considerados relevantes na tarifa em vigor.
- Situação 3 - Este caso é semelhante ao anterior, mas incorpora como variáveis explicativas aquelas que correspondem ao modelo seleccionado no capítulo anterior. Em relação à situação 2, com a qual se irão comparar os resultados, assinala-se como principais diferenças a desagregação dos grupos etários (considerando-se também a natureza do segurado neste factor), a introdução de uma variável regional construída com base nos concelhos de residência dos segurados, a eliminação do factor referente aos anos de fabrico dos veículos, por conduzir a resultados inaceitáveis em termos de mercado, e a agregação dos veículos com cilindrada superior a 1500 cm³ numa única classe, por razões que também se prendem com a aceitabilidade dos resultados.

Para além da definição das situações em estudo, importa também referir que se considerou sempre um modelo multiplicativo incorporando-se o sistema de bonus na estrutura do modelo.

Se, no caso de se utilizar uma escala geométrica, é possível estimar directamente o parâmetro de incremento entre classes consecutivas do sistema de bonus, já no que se refere ao uso de uma escala linear a situação é bem mais complicada, sendo necessário recorrer a uma grelha de valores fixados exogenamente para os parâmetros, escolhendo-se à posteriori a melhor combinação.

Por forma a explicitar de forma mais concreta a metodologia seguida, começa-se por apresentar a dedução com base nos valores pré-fixados por ser de âmbito mais geral, particularizando-se o procedimento aos dois tipos de escala em estudo. Num segundo ponto, refere-se a dedução directa do parâmetro óptimo, no âmbito da escala geométrica.

Em qualquer dos casos, fixou-se a classe inicial do sistema de bonus, k , como situação padrão, isto é como a classe onde não existem nem descontos nem agravamentos.

Dedução com base numa fixação à priori dos parâmetros Este processo é feito em três etapas, pressupondo-se fixados os valores referentes aos parâmetros do sistema de bonus, a e b .

- Calcular os prémios a pagar em cada uma das classes do sistema, recorrendo-se para tal à estrutura das escalas, isto é $\pi_j = a + b j$ no caso linear ou $\pi_j = a b^j$ no caso geométrico ($j = 1, \dots, K$).
- Fixar $\pi_k^* = 1$, isto é calcular

$$\pi_j^* = \frac{\pi_j}{\pi_k} \quad j = 1, \dots, K$$

- Sendo o modelo multiplicativo e a função de ligação logarítmica, ir-se-á incluir na parte linear do modelo como elemento pré-fixado ("offset" na terminologia dos modelos lineares generalizados) o logaritmo de π_j^* ou seja, designando por P_j esta componente para a classe j do sistema de bonus, ter-se-á

$$P_j = \begin{cases} \ln(a + b j) - \ln(a + b k) & \text{caso linear} \\ (j - k) \ln(b) & \text{caso geométrico} \end{cases} \quad j = 1, \dots, K.$$

Estas expressões sublinham bem a maior simplicidade do sistema geométrico numa situação deste tipo uma vez que apenas se terá de otimizar o sistema em ordem ao parâmetro b enquanto no caso linear se deverá ter em conta os dois parâmetros.

A pesquisa-se faz-se então por tentativas sucessivas com base em diferentes valores pré-fixados, optando-se como se disse pela combinação que origine uma menor "deviance", uma vez que se privilegiou este critério de qualidade.

Dedução directa no caso da escala geométrica Retome-se o processo anterior, considerando-se agora b como um parâmetro a estimar. Como se viu, o agravamento (ou desconto) a atribuir à classe j do sistema de bonus será dado por

$$P_j = (j - k) \ln(b) \quad j = 1, \dots, K,$$

sendo esta componente somada às que resultam dos factores directamente mensuráveis na estrutura linear do modelo.

Como tal, bastará construir uma nova variável $v = j - k$ de parâmetro γ na estrutura linear, parâmetro esse que será estimado pela máxima verosimilhança, obtendo-se então como estimativa para b

$$\hat{b} = e^{\hat{\gamma}}$$

que também será estimativa de máxima verosimilhança por se tratar de uma função bi-unívoca.

4.3. Os resultados obtidos

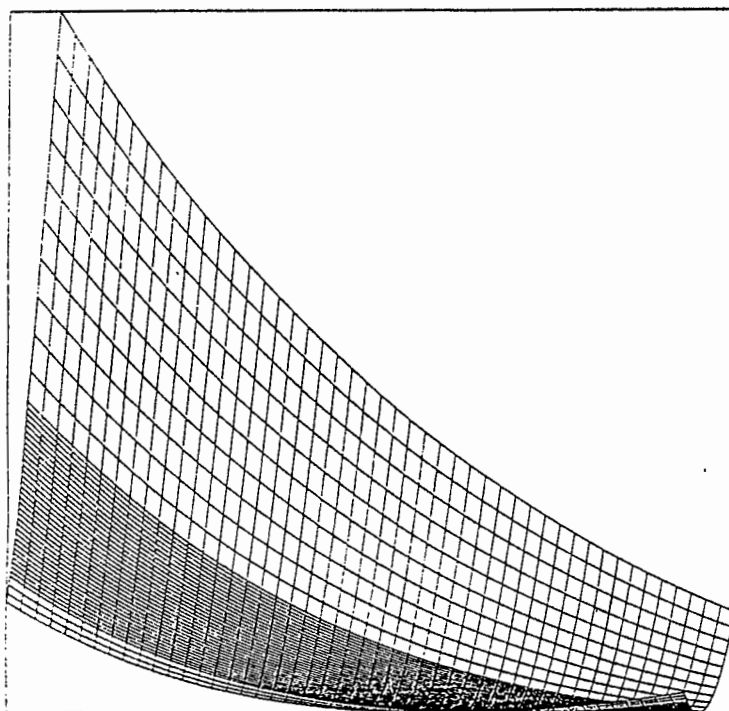
A análise dos resultados permite destacar alguns pontos fundamentais, pesem embora as cautelas necessárias na interpretação destes uma vez que ao colocar todas as apólices na classe inicial k no ano de 1982 por falta de informação disponível sobre a sinistralidade anterior, se está a analisar uma situação algo diferente daquela que se verificaria caso vigorasse o sistema de bonus em estudo (para não falar do processo de geração da carteira ou da não consideração da sede de bonus cujo impacto é tão significativo).

4.3.1. Escolha das escalas óptimas

A primeira conclusão a tirar será necessariamente para sublinhar a regularidade de comportamento da "deviance" face às variações nos parâmetros geradores do sistema de bonus. Tal facto é particularmente evidente no caso da escala geométrica existindo, quando se recorre à escala linear, bastantes combinações que conduzem

Gráfico 10.3 - Comportamento da "deviance" - Escala linear

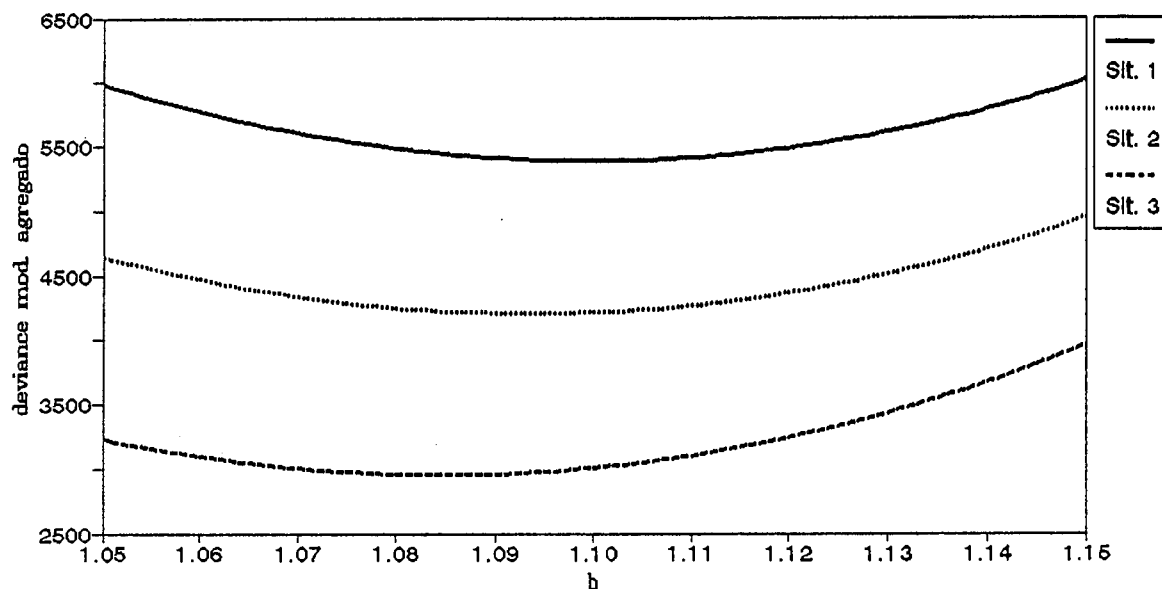
em função de a e b



a idênticos valores da "deviance", fenómeno que tem origem numa menor sensibilidade do sistema de bonus a pequenas variações nos parâmetros geradores. Nos gráficos 10.3 e 10.4 ilustra-se o comportamento da "deviance" nestes dois casos, apresentando-se no caso linear os resultados referentes à situação 3 por se tratar de uma representação tri-dimensional enquanto no caso geométrico se indicam as três situações. Ambos os gráficos dizem respeito à primeira simulação feita, e ao conjunto das duas carteiras, sendo os resultados semelhantes nas outras simulações.

Em termos otimizados em ordem aos parâmetros do sistema de bonus, as escalas lineares conduzem, *cæteris paribus*, a uma menor "deviance" sendo no entanto as diferenças proporcionalmente mais atenuadas no caso da situação 3. O quadro 10.3 mostra, nas situações ilustradas nos gráficos anteriores, as variações máximas face ao modelo mínimo que se obteve para a "deviance" bem como os

Gráfico 10.4 - Comportamento da “deviance” - Escala geométrica



parâmetros que conduzem a estes sistemas de bonus. No caso linear, para as situações 2 e 3, escolheu-se, de entre as soluções óptimas, aquela que permitia manter o parâmetro a constante para assim visualizar a menor amplitude do sistema de bonus para a situação 3.

Assinale-se ainda que se obtém a hierarquia esperada entre as situações em estudo, característica que pode ser vista a dois níveis distintos:

Quadro 10.3 - Escala linear versus escala geométrica - Carteira global

	Geométrica		Linear			G.L.
	b	Δ Dev	a	b	Δ Dev	
Situação 1	1.100	2355.77	4.85	1.170	2762.03	1
Situação 2	1.094	3537.28	6.25	1.235	3745.11	6
Situação 3	1.085	4639.27	6.25	1.050	4971.88	8

- por um lado em termos dos ganhos na “deviance”, o que permite sublinhar que o modelo seleccionado no capítulo anterior em termos dos factores directamente mensuráveis continua a mostrar uma melhor adequação aos dados disponíveis, muito embora se tenham eliminado os elementos que não eram admissíveis em termos de mercado.
- por outro lado em termos da *agressividade* do sistema. De facto à medida que a partição da carteira em células mais homogéneas vem diminuir a dispersão de comportamentos, o sistema de bonus tende a diminuir de amplitude, mantendo-se constantes as suas outras características uma vez que são fixadas à priori. No caso da escala geométrica tal abrandamento traduz-se num menor valor de b enquanto no caso linear a situação é algo mais complexa uma vez que se tem de jogar com dois parâmetros. No entanto a solução adoptada, mantendo a constante para as duas últimas situações, também ilustra claramente esta afirmação.

Tais resultados, pelos seus aspectos contraditórios, tornam difícil uma opção entre os dois tipos de escalas. De facto se é inegável que o sistema linear apresenta resultados ligeiramente superiores em termos estatísticos, não é menos verdade que ele origina uma complexidade bastante superior quer em termos da interpretação do sistema de bonus quer em termos da simplicidade das regras a aplicar no mercado.

Também se deve reforçar a ideia já expressa que os ganhos com a escala linear face à escala geométrica são menos significativos à medida que a qualidade dos factores directamente mensuráveis aumenta. De facto os ganhos com o modelo geométrico representam 85% dos ganhos com o modelo linear no caso de apenas se considerar o sistema de bonus sendo este valor de 93% para a situação 3 (veja-se o quadro 10.3).

4.3.2. Os impactos nos restantes factores

A introdução de um novo sistema de bonus irá inevitavelmente gerar, na carteira em estudo, impactos sobre os restantes coeficientes, fenómeno que mereceu ob-

Quadro 10.4 - Estruturas tarifárias - carteira global

Factor	Sist. Antigo	Esc. Lin.	Esc. Geom.
Freq. padrão (%)	9.6	8.82	8.25
empresas	76	68	70
idade 18-20 anos	47	56	61
idade 21-25 anos	37	46	51
idade 26-30 anos	18	25	28
carta com menos de 2 anos	62	70	77
Cil $\geq 1500 \text{ cm}^3$	25	24	25
litoral	-32	-30	-30
interior	-50	-48	-48

servação atenta, uma vez que constituía um domínio potencialmente sensível.

A primeira conclusão que se tira consiste numa clara diminuição em termos da frequência de sinistralidade referente ao segurado padrão, para além de se registarem alterações no comportamento relativo dos diferentes factores. O quadro 10.4, construído para a situação 3 com base na carteira que se tem vindo a discutir, apresenta a estrutura estimada, omitindo o sistema de bonus uma vez que se encontra perfeitamente determinado pelos parâmetros referidos no quadro 10.3 (uma visualização do comportamento dos sistemas de bonus nos casos lineares e geométricos pode ser vista no gráfico 10.5). Para além disto também se recorda a estrutura obtida no capítulo anterior sendo necessário não esquecer que, nesse caso, se estava a utilizar o sistema de bonus em vigor.

Em consequência da diminuição na frequência de sinistralidade do segurado padrão, que muito provavelmente sofreria uma atenuação caso se escolhesse uma classe inicial k mais elevada para o sistema de bonus ³, os restantes factores registaram a necessária adaptação a esta situação nova, podendo-se sintetizar o seu comportamento em duas categorias. Por um lado a cilindrada e a região habitual

³Recorde-se que, dadas as limitações na informação disponível, não era possível seleccionar valores de k superiores a 5 por forma a poder testar esta ideia.

de circulação mostram um robustez perfeita quer face à introdução do novo sistema quer ao tipo de escala de prémios que se venha a implementar enquanto, por outro lado, o grupo etário (incluindo-se nele a natureza do segurado) e a experiência do condutor vão compensar a diminuição no padrão assumindo variações bastante mais ampliadas.

Assinale-se porém que, se o comportamento do grupo etário, em sentido restrito, e a experiência do condutor assumem um comportamento regular, isto é maiores penalizações relativas em função da diminuição na sinistralidade padrão, já o factor que identifica as empresas manifesta-se de forma mais complexa. Tal facto permite indiciar uma acção positiva do novo sistema perante as empresas na medida onde tende a aplicar uma penalização mais adequada, estando-se embora numa situação que está longe de dispensar este factor.

4.3.3. Escala linear versus escala geométrica

Uma vez ponderadas as influências sobre os factores directamente mensuráveis, e dado que estas não constituem um instrumento adequado para a escolha de um dos tipos de escala, regressa-se ao estudo das escalas em si mesmas.

O primeiro elemento a sublinhar consiste no facto de, muito embora as duas escalas conduzam a prémios algo distantes como se pode ver no gráfico 10.5, ser necessário não esquecer que, mais do que as flutuações nas escalas mais elevadas do sistema que abrangem um número muito reduzido de apólices, interessa ponderar as diferenças nas primeiras classes. Neste ponto, é de destacar que a escala geométrica conduz a prémios ligeiramente inferiores nas primeiras classes do sistema.

A sede de bonus foi outro elemento que mereceu um estudo atento por forma a garantir que o sistema a implementar não induza limites de retenção demasiado elevados que venham, no fundo, a contrariar a essência da actividade seguradora.

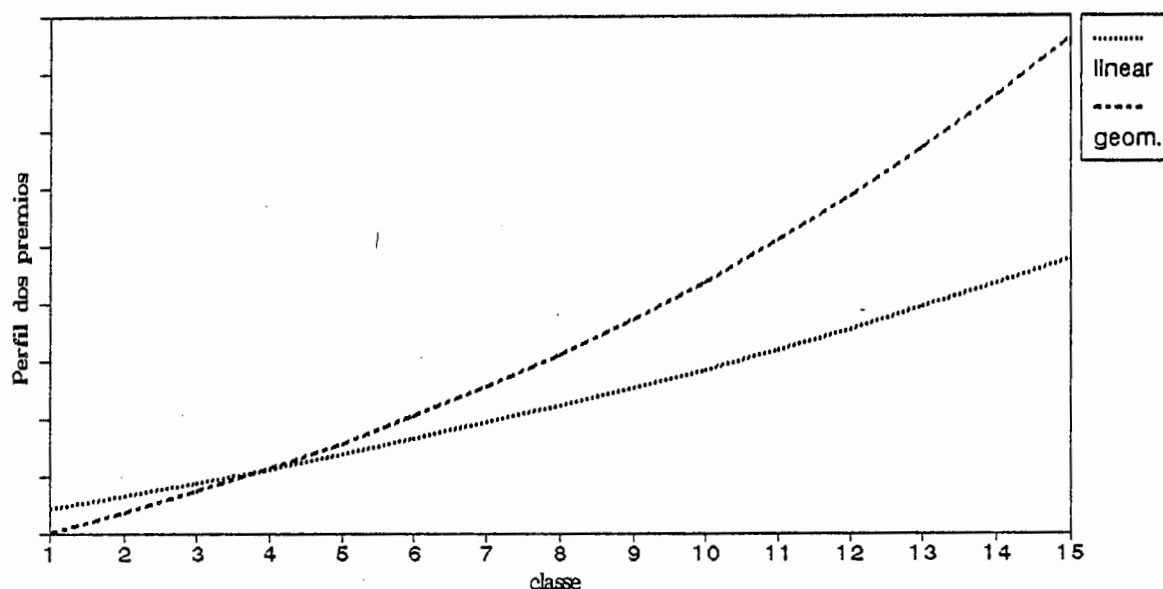
Construiu-se assim o quadro 10.5 baseado numa distribuição lognormal para o custo de um sinistro, admitindo-se um desvio-padrão 4 vezes superior à média

Quadro 10.5 - Distribuição estacionária e sede de bonus

Classe	p_j (%)		Dist. simulada	Dist. Estacionária		
	Lin.	Geo.		s/ ret.	Lin.	Geo.
1	37.4	31.5	44.8	56.5	75.4	73.2
2	45.0	39.2	5.1	5.9	4.8	5.2
3	50.2	45.0	6.5	6.6	5.1	5.4
4	53.9	49.6	13.9	7.3	5.3	5.7
5	56.8	53.5	19.8	8.0	5.6	6.0
6	58.9	56.7	0.8	3.2	1.2	1.4
7	60.6	59.6	0.8	3.0	1.0	1.1
8	61.6	61.7	1.1	2.6	0.7	0.9
9	62.3	63.5	2.4	2.2	0.5	0.6
10	62.6	65.0	1.6	1.3	0.2	0.2
11	62.6	66.3	0.5	1.1	0.1	0.1
12	57.3	61.9	0.7	0.9	0.1	0.1
13	50.3	55.8	0.7	0.7	0.0	0.1
14	40.5	46.6	0.7	0.5	0.0	0.0
15	25.2	31.2	0.6	0.4	0.0	0.0

Recorde-se que p_j representa a probabilidade de não participar um sinistro ocorrido e que as distribuições estão referidas em %.

Gráfico 10.5 - Escalas de prémios no sistema de bonus



(veja-se a primeira secção do presente capítulo) e supondo uma frequência de sinistralidade de 10% e prémio médio superior em 20% ao prémio puro.

Naquele quadro indica-se a probabilidade de não declarar um sinistro para as diferentes classe do sistema bem como a distribuição das apólices na situação em estudo e em termos de distribuição estacionária da cadeia com ou sem impacto da sede de bonus.

Como facilmente se deduz, até à classe 8 a escala linear origina probabilidades de não declarar um sinistro ocorrido superiores, invertendo-se a situação a partir da classe 9. Dado o desigual povoamento das diferentes classes, com uma tendência para a concentração da quase generalidade das apólices nas melhores classes do sistema, é fácil concluir que a escala linear origina uma sede de bonus acrescida face à escala geométrica. Se se considerar o povoamento da carteira em estudo, a probabilidade de participação de um sinistro ocorrido ronda os 58% com a escala geométrica, sendo 53% no caso linear. Convém no entanto não esquecer as limitações inerentes a esta metodologia e que já foram amplamente discutidas,

relembrando-se apenas que estes valores servem essencialmente como indicadores de comportamento.

Em termos de povoamento do sistema, é necessário não esquecer que estes resultados foram obtidos considerando a carteira como um grupo fechado, isto é sem entradas nem saídas, podendo-se no entanto concluir que, como seria de esperar face aos diferentes níveis de retenção, a escala geométrica tenderá a originar um povoamento ligeiramente mais equilibrado do que a escala linear, registando-se no entanto um desequilíbrio muito grande entre a classe 1 e as restantes classes do sistema.

Tais desequilíbrios podem ser significativamente atenuados se se considerar um grupo aberto com entradas na classe k e saídas distribuídas pelo conjunto das diferentes classes, sobretudo se se escolher valores mais elevados para k .

Tendo este estudo sublinhado que, em termos estatísticos não existem diferenças muito significativas em termos de comportamento entre os dois tipos de escalas, parece mais adequado fundamentar a necessária opção a fazer em termos de mercado. Neste quadro o princípio da simplicidade bem como o da parcimónia apontam ambos para uma estrutura de tipo geométrico uma vez que se traduz numa única regra de tarifação e na estimação de um único parâmetro.

De facto, enquanto a implementação da escala geométrica é feita com base na regra *anuidade sem sinistros origina desconto adicional de 8.5% e cada sinistro participado implica um agravamento adicional de 38.59%* dentro dos limites de variação máximos, o que provoca já algumas excepções quando se está em situações extremas, a escala linear provoca variações bastante mais complicadas de deduzir de forma directa. No quadro 10.6 representam-se as variações nos prémios em percentagem face ao prémio na classe onde se está em função do número de sinistros participados numa anuidade.

**Quadro 10.6 - Variações (%) nos prémios em função
do número de participações**

	Escala linear					Escala geométrica				
	Sinistros participados					Sinistros participados				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	0.00	57.53	115.07	172.60	230.14	0.00	38.59	92.06	166.17	213.34
2	-12.57	50.30	100.60	150.90	163.47	-8.50	38.59	92.06	166.17	188.79
3	-11.17	44.68	89.36	134.04	134.04	-8.50	38.59	92.06	166.17	166.17
4	-10.05	40.19	80.38	110.53	110.53	-8.50	38.59	92.06	145.32	145.32
5	-9.13	36.52	73.04	91.30	91.30	-8.50	38.59	92.06	126.10	126.10
6	-8.37	33.47	66.93	75.30	75.30	-8.50	38.59	92.06	108.39	108.39
7	-7.72	30.88	61.76	61.76	61.76	-8.50	38.59	92.06	92.06	92.06
8	-7.17	28.67	50.17	50.17	50.17	-8.50	38.59	77.01	77.01	77.01
9	-6.69	26.75	40.13	40.13	40.13	-8.50	38.59	63.15	63.15	63.15
10	-6.27	25.07	31.34	31.34	31.34	-8.50	38.59	50.37	50.37	50.37
11	-5.90	23.60	23.60	23.60	23.60	-8.50	38.59	38.59	38.59	38.59
12	-5.57	16.71	16.71	16.71	16.71	-8.50	27.73	27.73	27.73	27.73
13	-5.28	10.55	10.55	10.55	10.55	-8.50	17.72	17.72	17.72	17.72
14	-5.01	5.01	5.01	5.01	5.01	-8.50	8.50	8.50	8.50	8.50
15	-4.77	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.50	0.00	0.00	0.00	0.00

Capítulo 11

Prémio de Risco e Tarifa

Após ter analisado de forma aprofundada a carteira no que se refere às frequências de sinistralidade, este capítulo destinar-se-á a discutir três pontos fundamentais.

Em primeiro lugar, analisa-se a determinação do prémio de risco (secção 1) onde para além do perfil associado à frequência de sinistralidade se discute a oportunidade de introduzir um perfil referente ao montante de uma indemnização, retomando-se assim alguns aspectos metodológicos tratados no capítulo 9, muito embora num contexto algo diferente.

Em segundo lugar, abordam-se os problemas inerentes à construção da tarifa (secção 2) a partir do perfil do prémio de risco determinado na secção anterior, apresentando-se alguns exemplos de tarifas admissíveis. Neste ponto, não se pode deixar de salientar as limitações que advêm de não ter sido possível estabelecer um diálogo mais profundo com a empresa seguradora, o que originou que apenas se pudessem apresentar alguns exemplos de cunho mais académico e não um modelo directamente aplicável em termos de mercado.

Por fim, na secção 3, tecem-se algumas considerações sobre os problemas inerentes à transição entre sistemas tarifários, com particular incidência nas alterações do sistema de bonus.

O principal propósito deste capítulo será assim mostrar que as metodologias definidas ao longo do trabalho podem perfeitamente ser aplicadas no mercado segu-

rador português, constituindo um processo bastante mais rigoroso para fundamentar a discriminação que qualquer tarifa inevitavelmente introduz.

1. A estrutura do prémio de risco

Como é sabido, o prémio de risco define-se como valor esperado do risco, dadas as características relevantes do segurado perante este mesmo risco, e constitui a base natural de fundamentação de qualquer tarifa diferenciada (veja-se por exemplo *Bühlmann* [1970]).

No quadro habitual da teoria do risco, dada uma carteira de apólices, o prémio de risco pode ser escrito como

$$\mu(\theta) = E(X|\theta)$$

em que X representa o risco inerente a uma apólice e θ um parâmetro (ou vector de parâmetros) que permitem caracterizar cada risco dentro do colectivo. No caso do seguro automóvel, como na maioria dos ramos reais, é natural conceber o risco X como a soma dos montantes das indemnizações, em geral independentes e identicamente distribuídas dado θ , referentes a um número, também ele aleatório, de sinistros ou seja para cada apólice da carteira

$$X = \sum_{i=0}^M Y_i$$

supondo-se $Y_0 \equiv 0$. Admite-se também que, dado θ , os montantes das indemnizações são independentes do seu número, deduzindo-se então,

$$\mu(\theta) = E(M|\theta) E(Y|\theta) \quad (11.1)$$

tendo a variável Y a distribuição condicionada por θ comum a todos os Y_i condicionados pelo mesmo valor do parâmetro (eventualmente vector de parâmetros).

Todo o estudo que se desenvolveu até agora destinou-se a determinar a informação relevante para estimar $E(M|\theta)$ bem como a avaliar o impacto dos factores

seleccionados na frequência esperada de sinistralidade. No caso em que o valor esperado do custo associado a cada sinistro é independente das características do segurado, isto é em que $E(Y|\theta) = E(Y)$, o perfil que se determinou em termos de frequência corresponderá ao perfil do prémio de risco, existindo apenas um grau de liberdade já que se terá de fixar o prémio de risco referente ao segurado escolhido como padrão, questão essa que será tratada na secção 2.

Por ora ir-se-á discutir não só as formas de testar esta hipótese como também possíveis soluções alternativas que permitam considerar a influência das características do segurado no custo médio associado com um sinistro participado.

1.1. A estrutura associada ao custo de um sinistro

Estes dois problemas apenas costumam encontrar, na literatura especializada, uma resposta parcial na medida onde o único teste de independência que é feito debruça-se sobre a relação entre a frequência de sinistralidade e o custo médio dos sinistros (veja-se por exemplo *Lemaire* [1985]), concluindo-se, caso não se rejeite esta hipótese, pela necessidade de se analisar apenas a frequência de sinistralidade. De facto, embora alguns autores sublinhem (*Gregorius* [1982] nomeadamente) que as causas subjacentes à frequência de sinistralidade possam não ser idênticas àquelas que influenciam o montante das indemnizações, para além, claro está, de poderem originar impactos de importância diferente, raros são os autores que procuram modelizar os factores explicativos da gravidade dos sinistros.

A solução mais frequente, para não dizer unânime, consiste, no caso de se rejeitar a independência do custo médio face à frequência de sinistralidade, em procurar uma estimação directa do prémio de risco, modelizando-se o montante agregado das indemnizações em vez da sua frequência.

Uma tal abordagem não parece no entanto adequada na medida onde pode não só conduzir à omissão de factores relevantes cujos efeitos sejam contrários em termos da frequência de sinistralidade e dos custos associados a cada sinistro, como também origina uma situação muito pouco clara nas hipóteses a postular para a distribuição das indemnizações.

Trata-se efectivamente de uma distribuição de tratamento difícil uma vez que se está em presença de uma variável aleatória mista, com grande massa de probabilidade no ponto 0 (não ocorrem sinistros) e uma densidade para valores de $X > 0$. A solução utilizada geralmente consiste em recorrer ao teorema do limite central pese embora uma convergência bastante lenta da distribuição.

Parece assim mais correcto tratar separadamente cada componente, podendo-se então recorrer a alguns trabalhos existentes sobre a aderência do custo de um sinistro face a algumas distribuições estatísticas, sendo de referir o trabalho apresentado por *van der Laan & Hop* [1989] à conferência ASTIN onde se procede a um estudo bastante exaustivo da aplicação de distribuições ao custo associado a um sinistro no caso dos Países Baixos, para seguro automóvel e para seguro de saúde.

1.1.1. O recurso aos modelos lineares generalizados

Uma vez mais recorreu-se aos modelos lineares generalizados, procurando-se assim uma formulação suficientemente geral para instituir uma metodologia que permita modelizar a multiplicidade de situações que inevitavelmente se irão verificar.

Para tal é necessário definir os três elementos básicos de qualquer modelo linear generalizado, isto é a distribuição da variável endógena (aqui custo de um sinistro), a estrutura linear (ou sejam quais os factores relevantes que influenciam o custo médio dos sinistros) e a função de ligação.

Distribuição associada ao custo de um sinistro Como já se disse repetidamente ao longo deste trabalho (veja-se por exemplo os capítulos 5 e 7) os dados disponíveis não permitem deduzir nem tão pouco testar de forma minimamente adequada a distribuição desta variável, tendo em conta o grande número de sinistros por encerrar, limitação que se encontra ainda reforçada pela forma de cálculo das provisões, através de uma média definida *ex-ante*.

Neste contexto pareceu mais adequado recorrer a estudos desenvolvidos noutros países (nomeadamente *Barter & al*[1980] e *van der Laan & Hop*[1989]) procurando-

se apenas estimar os parâmetros, tarefa que já de si não parece muito segura dada a informação disponível. Destes estudos, o segundo apresenta maior interesse, quer por ser mais recente, quer sobretudo por comparar diversas distribuições, concluindo pela melhor adequação da lognormal face à sua grande "rival" a gama, se bem que esta última também apresente uma aderência aceitável no que se refere à sinistralidade automóvel ¹. Refira-se que estes autores apontam outras distribuições com uma melhor aderência mas à custa de um aumento no número de parâmetros a estimar.

Sublinhe-se de qualquer forma, para além da necessidade de recolha de dados nesta matéria, sem a qual não será possível avançar conclusões sobre a realidade nacional, que uma metodologia baseada nos modelos lineares generalizados permite que se ensaiem diversas soluções alternativas, optando-se posteriormente por aquela que se mostre mais adequada.

A selecção dos factores significativos Neste ponto retoma-se uma problemática já discutida anteriormente (vejam-se os capítulos 3 e 6) entre os defensores de uma fixação à partida das variáveis exógenas e aqueles que preferem implementar um processo de selecção baseado num teste estatístico. Saliente-se apenas como particularidade em relação ao estudo das frequências que alguns autores têm o cuidado de procurar separar os factores que parecem influenciar a frequência de sinistralidade daqueles que apenas actuam no custo dos sinistros (*Gregorius* [1982] nomeadamente).

A função de ligação Os problemas inerentes à definição da função de ligação do modelo serão semelhantes àqueles que se discutiram quando se estava a formalizar a modelização referente à frequência de sinistralidade. Assinale-se porém a existência de algumas particularidades associadas aos modelos com base nas duas distribuições apresentadas, que irão merecer um tratamento autonomizado nos próximos parágrafos.

¹A grande diferença verificou-se no estudo das indemnizações referentes a seguros de saúde onde a lognormal originou uma modelização claramente melhor do que a gama o que talvez indicie uma maior robustez desta distribuição na modelização do montante a associar às indemnizações.

A distribuição lognormal A modelização com base nesta distribuição é feita partindo do facto que, se Y tem distribuição lognormal, então

$$\ln(Y) \sim n(\mu, \sigma^2)$$

sendo no entanto necessário não esquecer que e^μ será a mediana de Y e não a sua média, já que

$$E(Y) = \exp(\mu + 0.5 \sigma^2)$$

$$\text{Var}(Y) = [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2)$$

Neste quadro um modelo multiplicativo será formalizado com base numa função de ligação identidade, tomando-se como termo constante não e^{β_1} mas sim $e^{\beta_1 + 0.5 \sigma^2}$.

Por outro lado para se obter uma estrutura aditiva ter-se-á de recorrer a uma função de ligação logarítmica, caso em que o termo constante será dado por $\beta_1 + 0.5 \sigma^2$.

Recorde-se que, em ambas as situações, σ^2 é estimado com base nos dados individualizados (veja a secção 2.4 do capítulo 4 para as limitações da deviance quando avaliada em termos agregados), podendo-se no entanto trabalhar com o modelo agregado desde que se saiba a variância amostral do modelo mínimo em termos individuais, S^2 , uma vez que

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} (Y_{rj} - \bar{Y})^2$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{n_r} (Y_{rj} - \bar{Y}_r)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R n_r (\bar{Y}_r - \bar{Y})^2$$

sendo S_1^2 o estimador pretendido. Partindo da igualdade

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2$$

obtem-se a estimativa de σ^2 calculando s_2^2 a partir do ajustamento obtido para o modelo agregado, deduzindo-se então

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 - s_2^2$$

Quando se pretende estimar o parâmetro de localização referente ao segurado padrão em termos do modelo original, a situação merece alguns cuidados particulares uma vez que, se $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}^2$ são estimadores de máxima verosimilhança, nada garante que $\exp(\hat{\beta}_1 + \hat{\sigma}^2)$ (ou $\hat{\beta}_1 + \hat{\sigma}^2$ no caso do modelo aditivo) também o seja uma vez que não se trata de uma função bi-unívoca.

Jonhson & Kotz [1970] referem² um trabalho de *Finney* [1941] onde este autor deduz os estimadores da média e variância de uma lognormal com base numa série cuja convergência é, no caso geral, bastante lenta, sugerindo no caso da média uma aproximação dada por

$$M \simeq \left[1 - \frac{\hat{\sigma}^2(\hat{\sigma}^2 + 2)}{4n} + \frac{\hat{\sigma}^4(3\hat{\sigma}^4 + 44\hat{\sigma}^2 + 84)}{96n^2} \right] e^{\hat{\beta}}$$

onde M representa o estimador de máxima verosimilhança para a média da lognormal e n a dimensão da amostra.

De qualquer forma, quando a amostra é grande, como é o caso da carteira em análise, o enviesamento será mínimo sendo perfeitamente aceitável tomar como estimativas para os parâmetros em termos da lognormal as funções das estimativas de máxima verosimilhança obtidas em termos do modelo logaritmizado.

Assinale-se ainda que no modelo estimado em função de $\ln(Y)$ os testes terão plena validade e não um valor meramente assintótico.

A distribuição Gama Quando se recorre à distribuição $\gamma(n, \alpha)$ é necessário ter presente a forma como são obtidas as estimativas de n uma vez que nos programas que lidam com modelos lineares generalizados, nomeadamente no GLIM, n não é estimado pela máxima verosimilhança mas sim recorrendo à deviance média (veja-se *Aitkin & al* [1989]).

Para clarrificar um pouco este aspecto recorde-se o logarítmo da função de verosimilhança a maximizar, depois de re-parametrizar a gama em ordem a n e μ

²páginas 119 e 120.

uma vez que $\mu = n/\alpha$.

$$L(n, \mu) = N[n \ln(n) - \ln(\Gamma(n))] + n \sum_{i=1}^N [\ln(y_i/\mu_i) - (y_i/\mu_i)] - \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \quad (11.2)$$

A partir desta expressão pode observar-se que o estimador de máxima verossimilhança para β não vai depender de n já que

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} = n \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} \frac{x_i - \mu_i}{\mu_i^2}$$

e portanto n não influenciará o ponto de estacionaridade.

No entanto o mesmo não sucederá no que se refere à deviance, como se deduz facilmente a partir da verossimilhança do modelo completo dada por

$$L_c = N[n \ln(n) - \ln(\Gamma(n)) - n] - \sum_{i=1}^N \ln(y_i)$$

obtendo-se então

$$D = 2n \left\{ \sum_{i=1}^N [(y_i/\mu_i) - \ln(y_i/\mu_i)] - N \right\} \quad (11.3)$$

O procedimento utilizado pelo GLIM consiste então em supor $n = 1$ (isto é que Y tem distribuição exponencial), estimar β e calcular a deviance D . Fixa-se então o parâmetro de escala,

$$n^{-1} = \frac{D}{N}$$

calculando-se então os erros padrões associados às estimativas obtidas para os β .

O recurso a este estimador simplificado para n poderá originar repercussões significativas na deviance e nos erros padrões, problema que, numa sucessão de modelos em cadeia, não deverá assumir gravidade extrema desde que n se mantenha mais ou menos constante.

A solução alternativa a que se recorreu no presente trabalho consiste em concentrar a verossimilhança em ordem a μ_i , obtendo-se

$$L^*(n) = N[n \ln(n) - \ln(\Gamma(n))] + n \sum_{i=1}^N [\ln(y_i/\hat{\mu}_i) - (y_i/\hat{\mu}_i)] - \sum_{i=1}^N \ln(y_i)$$

ou seja definindo

$$\begin{cases} R(\hat{\mu}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(y_i/\hat{\mu}_i) - (y_i/\hat{\mu}_i)] \\ c = \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \end{cases}$$

obtem-se

$$L^*(n) = N [n \ln(n) - \ln(\Gamma(n)) + n R(\hat{\mu}_i)] - c \quad (11.4)$$

função que se irá maximizar em ordem a n .

Calcule-se para tal

$$\frac{d L^*(n)}{d n} = N [1 + \ln(n) - \Psi(n) + R(\hat{\mu}_i)]$$

onde

$$\Psi(n) = \frac{d \ln(\Gamma(n))}{d n}$$

isto é $\Psi(n)$ será a função digama que não se encontra implementada na maioria dos software, nomeadamente no GLIM, razão pela qual este programa recorre a um processo não optimizado.

O processo seguido consistiu então em utilizar o programa GLIM na estimação do vector β , calculando-se $R(\hat{\mu}_i)$ e recorrendo a um pequeno programa auxiliar para obter \hat{n} como solução de

$$\Psi(n) - \ln(n) = 1 + R(\hat{\mu}_i)$$

Finalmente, obtida a estimativa de n , corre-se novamente o modelo no GLIM por forma a corrigir a deviance e os erros padrões associados às estimativas obtidas para os parâmetros de localização.

1.1.2. Análise da carteira

Muito embora existam, como já se referiu por diversas vezes, limitações significativas na informação disponível devidas quer ao número de sinistros por encerrar quer à metodologia utilizada no cálculo das provisões, não se quis deixar de analisar o perfil de custos que se retira da carteira em estudo.

Foi no entanto necessário ponderar estas limitações por forma a que o recurso a metodologias sofisticadas não conduza ao escamotear da duvidosa qualidade dos dados estatísticos que deverão ser o suporte fundamental das conclusões a tirar.

Com base nesta ideia, não se procurou avançar na escolha de uma distribuição teórica a aplicar ao custo de um sinistro, aproveitando-se a versatilidade dos modelos lineares generalizados e desenvolvendo-se o estudo com base nas duas distribuições mais utilizadas na literatura especializada, a lognormal e a gama.

Tenha-se também presente que as duas carteiras (referentes a 1987 e 1988) não são directamente comparáveis, quer por fenómenos como a inflação quer ainda pelo peso dos sinistros por encerrar que será bastante maior para a carteira de 1988. Neste quadro, optou-se por privilegiar os dados de 1987 servindo a outra carteira para avaliar a constância dos perfis apurados.

Refira-se ainda que cada registo nas carteiras primárias corresponde a um sinistro tendo-se anotado as características da apólice que lhe deu origem, quer se trate dos factores à priori quer do sistema de bonus quer ainda de um identificador que também permita avaliar o impacto do número de sinistros originados por uma apólice sobre o custo médio destes.

Antes de apresentar os principais resultados obtidos, duas palavras ainda para sublinhar que nem todos os factores que caracterizam o custo da sinistralidade originada por uma apólice têm o mesmo significado. Podem de facto considerar-se três categorias básicas.

Em primeiro lugar os factores mensuráveis à priori cuja utilização não se depara com limitações de qualquer espécie a não ser com a eventual aplicabilidade dos resultados em termos do mercado.

Em segundo lugar o sistema de bonus que só poderá ser tido em conta se não se optar por um sistema de variação constante. Poder-se-á eventualmente tratar a frequência de sinistralidade sem impor restrições ao sistema de bonus e desenvolver estudo semelhante no que se refere aos custos para avaliar o impacto do recurso a um sistema de variação constante face ao parâmetros óptimos.

Por último existe ainda uma variável explicativa que autores como *Lemaire*

Quadro 11.1 - Evolução do custo médio por número de participações

	1987			1988		
	C. Médio	σ	casos	C. Médio	σ	casos
1	112764	222922	8537	108496	169582	6357
2	98408	140757	838	96899	113026	480
3	93906	96026	78	85225	79687	51
4	74538	88473	12	50660	58134	8
5	65604	59114	5	—	—	—
F	1.1136 com 4 e 9465 g.l.			1.3521 com 3 e 6892 g.l.		

[1985] referem como pertinente e que consiste no número de sinistros participados. Como facilmente se aceita, se uma apólice origina muitas participações num determinado ano, a maioria delas tenderá a ter por base sinistros de pequena gravidade, esperando-se assim que o custo médio por sinistro seja decrescente com o aumento do número de sinistros participados por determinada apólice.

No quadro 11.1 representam-se o custo médio por sinistro dado o número de sinistros participados, bem como o desvio padrão e o número de casos para cada situação. Se bem que se note um decréscimo no valor médio em função do número de participações quer em 1988 quer em 1987, a variância intra-grupos é tão elevada que os testes de análise da variância apontam para a não rejeição da igualdade de médias como se pode ver no referido quadro.

Não se pode no entanto esquecer o quadro de hipóteses que sustentam a análise da variância, nomeadamente aquela que refere que a variância é suposta constante para os diferentes sub-grupos, para não falar do facto deste teste ser deduzido para populações normais. De facto, o povoamento muito irregular dos diferentes grupos bem como as variações significativas ao nível dos valores observados para as variâncias dos diferentes sub-grupos levam a questionar fortemente a legitimidade do recurso a esta metodologia (veja-se por exemplo *Murteira* [1990]).

Uma solução possível consistiria em admitir uma distribuição lognormal para

Quadro 11.2 - Evolução do custo (em log) médio por número de participações

	1987			1988		
	C. Médio	σ	casos	C. Médio	σ	casos
1	10.9499	1.2058	8537	10.9672	1.2558	6357
2	10.8935	1.1456	838	10.9149	1.2568	480
3	10.8597	1.2917	78	10.9790	0.9074	51
4	10.6328	1.1693	12	10.2619	1.1352	8
5	10.6412	1.1585	5	-	-	-
F	0.7976 com 4 e 9465 g.l.			1.0970 com 3 e 6892 g.l.		

os custos, hipótese que não é rejeitada pelos dados, e trabalhar em termos dos logaritmos destes mesmos custos que terão, evidentemente, distribuição normal. Este procedimento, cujos resultados figuram no quadro 11.2, aponta ainda mais claramente para a não rejeição da igualdade de médias nas sub-populações. Refira-se aliás que em termos transformados não se assiste já a uma evolução tão clara do custo médio como no caso anterior.

Sublinhe-se ainda que estes resultados estão marcados pelo método de cálculo de provisões que foi utilizado, não devendo portanto fundamentar conclusões definitivas.

Ainda com base na análise da variância (modelo logaritmizado), saliente - se que os únicos factores que apontam para uma clara rejeição da igualdade de médias são a componente regional ³ e a cilindrada dos veículos sendo de salientar

³Neste capítulo recorreu-se à variável construída com uma base concelhia tendo-se partido duma desagregação nos 4 grupos que se enumeram seguidamente mas, como se pode ver no quadro 11.4, acabou-se por agregar os grupos 2 e 3, considerando-se então apenas 3 regiões.

1. Áreas urbanas de Lisboa e Porto e regiões autónomas dos Açores e da Madeira
2. Zona litoral norte compreendo os distritos de Aveiro, Braga, Coimbra, Faro, Leiria, Porto, Viana do Castelo, Vila Real e Viseu à excepção dos concelhos incluídos nas áreas urbanas.

que, neste aspecto, é de admitir a existência de pelo menos três classes ⁴, obtendo-se uma progressão natural, situação que, recorde-se, não se verificava quando se estudou a frequência de sinistralidade.

A abordagem pelos modelos lineares generalizados foi feita em 4 etapas, correspondendo cada uma delas ao número de factores incluídos no modelo. Muito embora existam limitações à inclusão do sistema de bonus, uma vez que se apontou para um sistema de variação constante (em princípio geométrica), apresentam-se os resultados com esta variável na primeira fase do estudo (modelos com apenas um factor) para que se possa avaliar as perdas em termos de qualidade de ajustamento pela não inclusão deste elemento.

O quadro 11.3 apresenta os principais resultados em termos da variação da deviance face ao modelo mínimo referindo-se também, como indicador, o rácio entre a variação e os graus de liberdade.

A partir deste quadro, conclui-se sem dificuldade que os dois factores que influenciam de forma mais acentuada o custo de um sinistro serão a cilindrada do veículo e a região, muito embora a importância relativa de cada uma destas variáveis dependa da distribuição que se escolha.

No que diz respeito aos restantes factores é de assinalar que a antiguidade do veículo, para além de registar um comportamento irregular do parâmetro de localização nos diversos modelos, não assume peso significativo na redução da deviance. Para além disso realce-se também que o teste de significância para cada um dos β referentes a este factor conduziria a não rejeição da nulidade do parâmetro, o que reforça a ideia de não incluir esta variável.

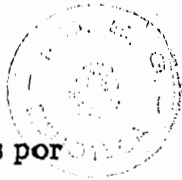
3. Zona litoral sul compreendo os distritos de Lisboa, Santarém e Setúbal à excepção dos concelhos incluídos nas áreas urbanas.

4. Interior compreendendo os distritos de Beja, Bragança, Castelo Branco, Évora, Guarda e Portalegre

⁴Dada a informação disponível, não é possível proceder a uma análise mais minuciosa dos impactos deste factor no custo dos sinistros.

Quadro 11.3 - Variações na deviance face ao modelo mínimo

factor	g.l.	Dist. Gama				Dist. Lognormal			
		Δ deviance		rácios		Δ deviance		rácios	
		1987	1988	1987	1988	1987	1988	1987	1988
Região (REG)	3	27.65	18.56	9.22	6.19	36.06	36.67	12.02	12.22
Idade seg. (IDA)	4	16.71	3.96	4.18	0.99	9.55	8.07	2.39	2.02
Anos carta (CAR)	1	5.96	0.29	5.96	0.29	0.38	8.36	0.38	8.36
Anos fabrico (FAB)	4	22.79	5.15	5.70	1.29	10.78	1.58	2.69	0.39
Cilindrada (CIL)	2	34.45	23.79	17.23	11.89	18.15	10.29	9.08	5.15
Sistema bonus (BON)	5	40.51	7.61	8.10	1.52	8.99	9.56	1.80	1.91
CIL + REG	5	60.70	41.72	12.14	8.34	53.72	45.83	10.74	9.17
CIL + IDA	6	54.25	30.19	9.04	5.03	29.32	20.01	4.89	3.34
CIL + CAR	3	40.30	24.63	13.43	8.21	18.89	19.98	6.30	6.66
CIL + FAB	6	61.62	29.69	10.27	4.95	30.52	11.76	5.09	1.96
REG + IDA	7	47.37	23.47	6.77	3.35	48.25	48.10	6.89	6.87
REG + CAR	4	34.48	19.03	8.62	4.76	36.38	45.64	9.10	11.41
REG + FAB	7	49.04	23.50	7.01	3.36	45.45	38.54	6.49	5.51
CIL + REG + CAR	6	67.54	42.85	11.26	7.14	54.37	56.07	9.06	9.35
CIL + REG + IDA	9	83.63	49.32	9.29	5.48	67.69	59.04	7.52	6.56
CIL + REG + FAB	9	86.42	47.34	9.60	5.26	64.58	47.52	7.18	5.28
CIL + REG + CAR + IDA	10	88.54	49.86	8.85	4.99	67.69	64.36	6.77	6.44
CIL + REG + CAR + FAB	10	93.51	48.83	9.35	4.88	65.39	57.72	6.54	5.77



O sistema de bonus, nos termos em que vigora, também foi estudado mais por curiosidade do que com o intuito de ser introduzido na tarifa uma vez que, como se disse, a opção por uma escala de variação constante (em termos relativos ou absolutos) conduz necessariamente à eliminação deste factor no perfil dos custos associados a cada sinistro.

O comportamento do factor grupo étario do segurado é algo mais complexo uma vez que se incluiu nesta variável a natureza do segurado. O estudo dos quatro modelos sugere que apenas a natureza do segurado tem implicações significativas no custo dos sinistros o que levou a testar, para este efeito, uma variável que apenas traduza esta situação, factor esse que se mostrou significativo nas diversas situações ensaiadas.

Por fim refira-se que a experiência do segurado, avaliada pela antiguidade da sua carta de condução, apresenta uma significância irregular, apenas se concluindo pelo seu interesse inequívoco no caso da distribuição gama para o ano de 1987, registando-se um efeito contrário nas restantes situações, razão pela qual se decidiu não considerar este factor.

Apresenta-se assim o perfil obtido nos quatro modelos em termos de variação face ao padrão, como é habitual, sublinhando-se no entanto que o valor apurado em termos deste mesmo padrão (em escudos) apenas constitui uma estimativa tendo por base as provisões feitas, o que conduz muito naturalmente a dar maior peso aos dados mais antigos por terem uma menor componente em termos previsionais.

Os resultados do quadro 11.4 sublinham que, se as duas distribuições conduzem a uma selecção idêntica dos factores significativos, já o mesmo não acontece no que respeita às variações nos parâmetros que se deduzem dos β estimados.

Numa situação como a do presente estudo em que a informação disponível apresenta limitações significativas, parece aconselhável procurar não ampliar as variações antes de poder avaliar estatisticamente da justeza das mesmas. Neste sentido o quadro 11.4 deverá servir como referencial, escolhendo-se um perfil que tenha em conta os resultados obtidos mas que simultaneamente não seja demasiadamente extremado. Um exemplo de uma tal escolha figura na última coluna

Quadro 11.4 - Perfil dos custos associados a um sinistro (em %)

	Gama		Lognormal		(a)
	1987	1988	1987	1988	
cilindrada entre 1501 e 2500 cm ³	17	20	14	12	15
cilindrada superior a 2500 cm ³	49	21	17	22	25
Litoral Norte	-6	-4	-10	-16	-10
Litoral Sul	-2	-12	-6	-13	-10
Interior	-22	-20	-23	-19	-20
Empresas	-21	-16	-21	-18	-15
custo padrão (10 ³ escudos)	112	108	114	127	-

(a) - Uma das propostas possíveis.

do quadro mas, como é evidente, trata-se apenas de uma entre múltiplas soluções possíveis.

1.2. A determinação do perfil do prémio puro de risco

Se bem que para efeito de construção da tarifa seja mais correcto tratar de forma autónoma as duas componentes da sinistralidade que se analisaram, poder-se-á, para efeitos de interpretação da estrutura montada, construir um perfil para o prémio puro de risco que resultará da ponderação das duas estruturas referenciadas na expressão (11.1).

Caso se tenham escolhido idênticas características para o segurado padrão nas duas estruturas (frequência e custos), fácil se tornará efectuar a projecção de forma global, muito embora não deixe de ser necessária a ponderação de cada um dos elementos de per sí como se verá na secção seguinte.

Na ligação das duas estruturas básicas, o ponto mais sensível residirá nos alisamentos a estabelecer quando o comportamento de determinado factor induzir situações extremas, nomeadamente um impacto oposto em termos de frequência e custos. O tratamento destes casos deverá merecer cuidados acrescidos, sendo

Quadro 11.5 - Perfil do prémio puro de risco (%)

Factor	Freq.	Custo	Prémio de risco
empresas	70	-15	45
idade 18-20 anos	61	-	61
idade 21-25 anos	51	-	51
idade 26-30 anos	28	-	28
carta com menos de 2 anos	77	-	77
Cil $\geq 1500 \text{ cm}^3$	25	15	44
litoral	-30	-10	-37
interior	-48	-20	-58

Sistema de bonus com 15 classes, regras de transição 4-1 (4 classes de penalização por cada sinistro participado e uma classe de bonus por cada ano "limpo", início na classe 5 e prémios seguindo uma escala geométrica com agravamento de 8.5% entre classes consecutivas.

necessário um acompanhamento bastante estreito da evolução da sinistralidade para verificar se a validade de tal fenómeno não se encontra restrita apenas a determinado período.

Como é evidente, é também necessário, nestas como na generalidade das situações, que se possam relacionar os factores seleccionados com as diferentes vertentes da sinistralidade, podendo o estudo desenvolvido em *Gregorius* [1982] constituir referencial de particular interesse.

Um último ponto que também merece uma ponderação cuidada consiste na introdução de sub-sistemas de parâmetros com valores determinados à priori, nomeadamente no que se refere a sistemas de bonus com taxas de variação constantes. Tal opção deverá merecer tanto mais cautelas quanto maior forem as discrepâncias entre os parâmetros fixados pelo sistema e aqueles que resultem de uma análise combinada, semelhante ao processo que se segue para os restantes factores.

No caso da carteira que se tem vindo a analisar seria talvez mais correcto

recorrer apenas aos factores explicativos da frequência de sinistralidade tendo em conta as limitações na informação referente aos custos. Dado o propósito demonstrativo deste estudo, não se quis deixar de ilustrar a situação no que se refere à dedução do perfil global do prémio puro de risco tendo por base as duas abordagens referidas.

O quadro 11.5 ilustra esta situação recorrendo-se aos dois perfis parciais determinados nos quadros 10.4 (sistema de bonus com escala geométrica) e 11.4, apresentando-se os resultados em termos de variações percentuais face ao padrão. Agregaram-se os veículos com cilindrada superior a 2500 cm³ na classe entre 1500 e 2500 cm³ uma vez que o seu comportamento relativo oscila em torno desta classe (inferior no que se refere à frequência e superior no que diz respeito aos custos de um sinistro), fenómeno que acentua a necessidade de se registarem outras características técnicas, nomeadamente a potência e peso dos veículos.

2. A construção da tarifa

As diversas componentes do prémio, tal como foram apresentadas no capítulo 2 ou como são referidas na literatura especializada (veja-se por exemplo *van Eeghen & al* [1983] ou *Goovaerts & al* [1984]), podem reagrupar-se em duas categorias básicas, a primeira correspondendo ao risco aceite pela seguradora e a segunda destinada a cobrir os custos inerentes quer aos aspectos comerciais da actividade seguradora quer à estrutura montada quer ainda a taxas fixadas pelo governo⁵, recolhendo a primeira parcela a quase totalidade do interesse em termos da teoria do risco.

Numa abordagem que considere apenas a oferta, também seria necessário considerar que, para fazer face aos riscos aceites, a seguradora conta não só com os prémios cobrados como também com os rendimentos financeiros cuja origem reside

⁵Em Portugal como nos restantes países da CEE existe um fundo de garantia determinado e controlado a nível central que se destina a cobrir situações à margem do sistema (indemnizar vítimas quando o responsável não tem seguro válido ou é desconhecido ...) sendo financiado por uma taxa aplicada ao prémio cobrado pelas seguradoras.

no diferencial de tempo entre a cobrança dos prémios e o pagamento das indemnizações, período que pode abranger vários anos como já se viu. Este raciocínio levou alguns autores (veja-se *Kahane* [1979] ou *Beard & al* [1984] por exemplo) a proporem que esta parcela adicional de receita também seja considerada na determinação dos prémios, o que pode originar margens muito pequenas a adicionar ao prémio puro de risco, eventualmente negativas num caso extremo.

Sublinhe-se no entanto que, no caso português, o facto de se estar a viver um período de forte incremento dos montantes mínimos a segurar em responsabilidade civil, com consequências evidentes nas indemnizações referentes a processos mais morosos, pode introduzir uma erosão significativa nos ganhos com origem numa maior demora no pagamento das indemnizações.

Não sendo possível uma avaliação séria do impacto destes fenómenos optou-se por não os tratar de forma autónoma, apenas os considerando na fixação dos parâmetros que irão definir cada uma das componentes enunciadas.

A determinação da primeira componente, referente ao risco transaccionado, encontra-se estreitamente ligada aos princípios de cálculo apresentados no capítulo 2 e traduz-se por sua vez na soma de duas parcelas, uma correspondendo à estimativa obtida para o prémio puro de risco e outra destinada a compensar as flutuações aleatórias inerentes ao risco⁶.

Se existe alguma discussão teórica em torno da determinação do método mais adequado para tarifar estas flutuações (veja-se a secção 1.3 do capítulo 2), também não restam dúvidas que na maioria das situações práticas recorre-se ao princípio do valor esperado, definindo-se as flutuações como percentagem do prémio puro de risco estimado. A aplicação de outros princípios necessitaria da definição de um quadro de hipóteses mais rigoroso por forma a poderem estimar-se com alguma segurança outros parâmetros da distribuição do risco inerente a cada apólice.

De qualquer forma, é fácil depreender o peso preponderante que a estimação do prémio puro de risco tende a assumir, razão pela qual este problema foi longamente analisado neste trabalho, tendo-se definido uma estrutura que se supõe

⁶Relembre-se que em termos da teoria do risco a desigualdade de Jensen conduz a não aceitar um risco se o seu prémio apenas corresponde ao valor esperado do risco aceite.

relativamente constante ao longo do tempo, pelo menos num horizonte de médio prazo. Na sub-secção 2.1 do presente capítulo discutir-se-ão os problemas inerentes à determinação monetária do valor a atribuir ao segurado padrão situação a partir da qual se estabelecem sem dificuldade os valores a cobrar nas diferentes classes.

A segunda componente, mais ligada às características do mercado segurador bem como às estruturas das empresas que nele actuam, deverá ser avaliada com base nestas mesmas características. O problema será aqui comum a muitos outros sectores, residindo a sua especificidade apenas no facto desta actividade ser sujeita à supervisão de uma autoridade de controle ou, no caso limite, existir uma tarifa determinada de forma superior por esta autoridade e que tem validade para todo o mercado.

Nalguns textos cujo propósito, mais do que penetrar nos meandros da teoria do risco, consiste em proporcionar um tratamento virado para os aspectos mais práticos da actividade seguradora (*Benjamin* [1977] por exemplo) ou em fundamentar algumas propostas empíricas (*Coutts* [1984] nomeadamente) podem ver-se formulações mais cuidadas desta componente.

Como desde logo se definiu, não é propósito do presente trabalho tratar tais aspectos que se irão prender ou com a estratégia de gestão da seguradora ou com normas de definição da política económica a estabelecer pelo governo, apenas se tecendo alguns comentários por forma a enquadrar minimamente os problemas que inevitavelmente se irão pôr em termos duma aplicação concreta.

O primeiro aspecto a ponderar será sem dúvida o enquadramento legal dentro do qual se desenvolve a actividade da seguradora cujos efeitos, em termos tarifários, podem ir de uma tarifa única para todo o ramo automóvel (casos da Suíça ou da Bélgica por exemplo) até à existência de uma tarifa diferenciada para cada uma das seguradoras (casos do Reino Unido ou da Noruega entre outros), muito embora exista sempre uma autoridade de controle que de alguma forma dá o seu aval às propostas emanadas das companhias. Assinale-se a este propósito que uma descrição de diversos sistemas tarifários pode ser vista em *Lemaire* [1985].

Neste ponto, a situação portuguesa pode caracterizar-se como sendo um mer-

cado que evoluiu de um sistema de tarifa única para uma situação algo confusa onde não existem mecanismos que tornem claras as regras de funcionamento do mercado, sendo prática mais ou menos corrente o recurso a formas indirectas de actuação por parte das seguradoras, situação cuja causa reside numa certa incapacidade em romper com a situação em vigor onde se tende a manter uma estrutura tarifária que se mostra visivelmente desadequada em múltiplos aspectos, entre os quais se destaca o sistema de descontos e agravamentos actualmente existente.

Por outro lado, refira-se também que alguns factores económicos desempenham papel importante na fixação dos prémios, alguns dos quais serão comuns a muitos outros sectores (inflação, evolução dos salários dentro e fora da companhia, etc...), sendo de realçar aqueles que são próprios do ramo pelo seu impacto na sinistralidade (preço dos combustíveis, dos veículos, variáveis com impacto directo nos níveis de circulação, ..). Para além destes elementos é necessário não esquecer os aspectos mais directamente ligados aos objectivos de política económica ou à estratégia das empresas no caso de existir uma tarifa diferenciada.

Uma solução que encontra alguma popularidade em situações de tarifa única consiste em fixar a componente administrativa como percentagem do prémio referente ao risco, existindo então ganhos ou perdas marginais para as empresas em função da sua estrutura de custos particular. Pode a este propósito citar-se o caso da Suíça onde o prémio comercial para o segurado padrão é fixado em 126% do prémio puro de risco previsto (3% para compensação das flutuações aleatórias e 23% para despesas) não se incluindo nesta taxa a compensação devida ao facto da classe 100 do sistema de bonus ser fixada a priori e do peso muito superior das melhores classes do sistema face aquelas que originam maiores prémios (veja-se *Gerber [1990]*) situação para a qual existe uma taxa de compensação fixada em 35%.

As formulações mais elaboradas que se referiram para o tratamento destes aspectos (*Coutts [1984]* ou *Benjamin [1977]*) prevêm não só a consideração desta componente com percentagem do risco como também em termos de uma solução mista (componente fixa por apólice mais taxa em função do prémio de risco estimado), existindo ainda alternativas que procuram discriminar as várias compo-

nentes das despesas, aplicando-se então as parcelas apuradas em função da situação de cada apólice. Como é natural estas considerações mais particularizadas apenas fazem sentido num mercado tarifário liberalizado onde exista uma autonomia efectiva das seguradoras na determinação da sua tarifa. Neste contexto torna-se também necessário referir a importância dos elementos ligados à estratégia de cada empresa, que poderão assumir um peso significativo nas decisões a tomar.

Sublinhe-se por fim que, pesem embora os elementos arbitrários existentes na fixação da tarifa quer em termos empresariais quer em termos da autoridade central, a construção de uma tarifa “sombra” que corresponda a uma avaliação tão correcta quanto possível dos riscos aceites permitirá à seguradora identificar os segmentos de mercado que apresentam vantagens relativas mais acentuadas, permitindo assim orientar de forma adequada o sector “produção”. Volta-se no fundo à problemática que se abordou em termos mais teóricos na secção 2.3 do capítulo 2.

2.1. A estimação do nível médio de risco

Os problemas inerentes a tal previsão são variados e envolvem uma aleatoridade bastante significativa. De qualquer forma é recomendável efectuar a estimação tendo por base cada uma das componentes consideradas de forma autónoma, isto é estimar separadamente a frequência de sinistralidade e os custos a associar aos sinistros, se bem que existam factores económicos que desempenhem um papel significativo para as duas vertentes.

Antes de analisar mais pormenorizadamente os factores e metodologias mais relevantes para efectuar tais estimativas, o primeiro problema que deve merecer alguma ponderação será a definição tão exacta quanto possível do horizonte para o qual se vão efectuar as previsões.

Considere-se uma seguradora que queira rever a sua tarifa, implementando a nova estrutura no dia 1 de Janeiro de determinado ano e pressupondo que esta nova tarifa estará em vigor por um prazo de um ano. Em termos práticos o processo de análise terá de estar concluído com alguns meses de antecedência por

forma a poder produzir toda a informação e alterações necessárias à entrada em vigor do novo sistema de prémios. Este prazo dependerá também da amplitude das modificações que se irão introduzir bem como de alguns aspectos legais que se tenham de considerar.

Se no que se refere às previsões para a frequência de sinistralidade não existem problemas em termos duma definição clara do período para o qual elas deverão ter validade, tratando-se do período em que a tarifa vai estar em vigor, já o mesmo não acontece no que respeita aos custos a associar às indemnizações.

De facto, se é possível de considerar como data média de ocorrência de um sinistro o dia 1 de Julho do ano em causa, isto é 6 meses após a entrada em vigor da tarifa ⁷, os problemas serão bem mais complicados no que concerne à definição dos prazos necessários ao encerramento dos processos.

Se é lícito supor uma duração relativamente curta para o encerrar dos processos referentes a pequenos sinistros (uma boa percentagem dos casos estará encerrada no fim do ano ou pouco depois), já o mesmo não sucederá aos sinistros de maior monta cujos processos podem manter-se em aberto durante vários anos, sendo necessário ter presente tais elementos na projecção dos custos uma vez que, muito embora o ano de referência seja o mesmo, o facto do processo vir a ser julgado anos depois pode ter repercussões nos montantes das indemnizações (*Coutts* [1984] aponta para a consideração de um prazo médio para este efeito de cerca de 8 anos, dado o maior peso dos grandes sinistros que são geralmente os mais morosos a encerrar).

Por outro lado a estrutura do prémio puro de risco terá tendência a fundamentar-se em observações feitas alguns anos antes para evitar justamente o facto de existirem muitos sinistros por encerrar sendo portanto necessário avaliar se não se registaram entretanto alterações na estrutura a aplicar.

Em termos estatísticos as previsões para a frequência de sinistralidade poderão basear-se em metodologias de tipo Box-Jenkins eventualmente com função transferência onde se definam outras séries que funcionem como indicadores avançados

⁷Não se consideram para simplificar sazonalidades na evolução da sinistralidade ao longo do ano.

da sinistralidade. Uma metodologia particularmente interessante, baseada no processo de Poisson, pode ser vista em *Harvey & Durbin* [1986] que estudam a evolução da sinistralidade automóvel no Reino Unido entre 1969 e 1984. Neste domínio uma síntese de várias metodologias pode ser vista em *Tomé* [1989].

A obtenção dos custos médios a considerar será mais subjectiva, quer por sofrer um impacto bastante maior do ambiente macroeconómico que irá vigorar quer ainda pelos efeitos inerentes ao facto do prazo de projecção ser bastante mais vago. Particular atenção deverá ser dada a fenómenos como a inflação, alterações nos comportamentos sociais de que possam resultar alterações significativas nas decisões dos tribunais, modificação nos limites mínimos a segurar cuja evolução também possa ter impacto nestas sentenças.

Neste campo destaque-se o estudo particularmente interessante feito por *Klugman & Murray* [1984] onde se relaciona o montante das indemnizações pagas em responsabilidade civil com o valor limite para o capital seguro. No caso português apenas se conhece um trabalho, *Portugal* [1985], onde se pretende relacionar, em termos agregados, o custo médio das indemnizações em responsabilidade civil no ramo automóvel com o capital médio seguro e um indicador de inflação (o índice de preços no consumidor naquele caso), pesem embora as limitações de tal estudo entre as quais se destaca a escassez de observações que o suporta.

2.2. Alguns exemplos

Para ilustrar as considerações que se acabaram de tecer, apresentam-se alguns exemplos de tarifas. A preocupação principal neste ponto foi sem dúvida a de procurar, através dum conjunto necessariamente restrito de situações, ilustrar as diferentes concretizações possíveis dos perfis que se definiram em termos de tarifas.

Não houve assim necessidade de distinguir entre situações referentes a enquadramentos legais diferentes, uma vez que os parâmetros definidores dos cenários foram fixados à priori. No caso de se tratar de uma aplicação real, situação que, como já se referiu, não foi possível concretizar, boa parte das decisões a serem tomadas fora do âmbito estatístico seriam traduzidas nestes parâmetros, suce-

dendo algo de semelhante, embora num âmbito mais alargado, caso se tratasse de definir uma tarifa única por parte da autoridade de controle.

Em termos dos elementos externos à empresa, admitiram-se duas frequências possíveis para as participações, 8 e 10%, fixando-se três valores para o custo médio das indemnizações referentes a responsabilidade civil, 120, 150 e 180 contos. Sublinhe-se que se trata das participações e não dos sinistros, isto é que apenas se consideram os casos que dão origem a indemnizações o que terá consequências importantes quer na frequência observada quer nos custos médios a associar a cada indemnização (a este propósito veja-se no capítulo 10 o peso que fenómenos como a *sede de bonus* podem assumir).

Por outro lado admitiu-se uma tarifa funcionando com base no prémio puro de risco, postulando-se uma margem para desvios de sinistralidade de 3% sobre este prémio puro de risco e uma taxa para despesas de 25% incluindo nestas a participação para o Fundo de Garantia Automóvel.

Como estrutura tarifária ensaiaram-se duas alternativas, qualquer delas baseada no novo sistema de bonus com escala geométrica e considerando uma variável regional, residindo a diferença na consideração ou não de um perfil específico para os custos associados às indemnizações. Assim a primeira alternativa (perfil (a) no quadro 11.6) apenas considera a frequência esperada de sinistralidade, quadro 10.4, enquanto a segunda (perfil (b) no quadro 11.6) procura discriminar um pouco mais recorrendo ao perfil definido no quadro 11.5 para o prémio puro de risco.

Qualquer que seja a situação, e dado que todas as componentes são definidas em função do prémio puro de risco, tratar-se-á tão somente de fixar o prémio referente à situação escolhida como padrão aplicando-se então as percentagens de variação definidas em cada perfil para obter o prémio correspondente a cada situação.

Neste ponto, o principal cuidado a ter consiste em não confundir o prémio puro no colectivo com o segurado padrão uma vez que este foi seleccionado com base num conjunto de características bem definidas e não como correspondendo à situação média. A passagem de uma situação para a outra no que diz respeito à

carteira que vai vigorar num período futuro, exige algumas hipóteses em termos da composição futura desta mesma carteira.

A solução mais simples consiste em introduzir um coeficiente de variação no prémio puro de risco entre as duas situações tipo, segurado médio e segurado padrão, postulando-se eventualmente uma ligeira variação na evolução deste coeficiente. Seja então q o quociente entre o prémio puro de risco referente ao segurado padrão (p) e o prémio puro no colectivo (m) ou seja,

$$q = \frac{p}{m}$$

A situação em termos da frequência de sinistralidade pode ser vista com base nos dois anos em estudo (1987 e 1988) ou recorrendo à carteira global, solução adoptada por parecer a mais adequada, o que permitiu deduzir como valor aceitável $q = 1.17$.

Quando se utiliza também o perfil das indemnizações associadas a um sinistro, é necessário ter presente que a informação disponível referente a cada um dos anos deixa de ter valor semelhante uma vez que, nos dados de 1988, existe um número muito maior de sinistros por encerrar para os quais não se dispõe de estimativas de custos adequadas. Por outro lado é necessário não esquecer que se tem de combinar o coeficiente obtido em termos de frequência com aquele que resulta dos custos. Neste contexto, baseando-nos no coeficiente de frequência anteriormente apurado e deduzindo o coeficiente referente aos custos a partir dos elementos referentes a 1987 obtém-se como solução possível

$$q = 1.203 \text{ ou seja } 1.17 \times 1.025$$

Também aqui será necessário prever a evolução destes valores parecendo razoável admitir um comportamento mais ou menos constante no curto prazo uma vez que foi uma hipótese semelhante que sustentou a manutenção dos perfis estimados. Pode no entanto considerar-se uma correcção devida ao sistema de bonus se for previsível ⁸ que a sua distribuição venha a sofrer alterações importantes,

⁸No momento em que se estabelecem as previsões finais existe já uma informação parcial sobre a distribuição das apólices nas diferentes classes do sistema de bonus no ano seguinte.

Quadro 11.6 - Prémio referente ao segurado padrão para R.C.

Freq. Part.	Custo médio por sinistro					
	120 contos		150 contos		180 contos	
	Perfil (a)	Perfil (b)	Perfil (a)	Perfil (b)	Perfil (a)	Perfil (b)
8%	14377	14782	17971	18478	21566	22173
10%	17972	18478	22465	23098	26958	27717

Perfil (a) Apenas se considerou as variações baseadas na frequência das participações.

Perfil (b) Para além dos aspectos anteriores, também se inclui o perfil dos custos associados ao custo de uma indemnização.

introduzindo-se eventualmente uma taxa de compensação para este fenómeno. Na carteira que se está a estudar, um coeficiente deste tipo não parece necessário uma vez que, recorrendo a um modelo teórico (não se dispõe de observações referentes a 1989 e a 1990) as alterações no sistema de bonus não parecem ser suficientemente profundas para que se tenha de utilizar esta medida, supondo-se assim que os coeficientes referidos serão válidos para o próximo ano.

As soluções a que se é conduzido, em termos de prémio a aplicar ao segurado padrão constam do quadro 11.6, ⁹ deduzindo-se os restantes valores a partir dos perfis que se referiram no quadro 11.5.

Por fim no quadro 11.7 ilustram-se os resultados obtidos com a definição do prémio para algumas situações. Para não sobrecarregar o quadro apenas se referem os resultados referentes a um custo médio de 120 contos por indemnização, podendo-se obter os prémios referentes a qualquer outro valor para o custo médio por simples proporcionalidade, dada a forma escolhida para definir a componente referente aos custos administrativos.

⁹Os valores consistem no prémio a aplicar ao segurado médio corrigido pelo coeficiente q respectivo, isto é

$$P = m \times (1 + 0.25 + 0.03) \times q$$

Quadro 11.7 - Alguns exemplos de prémios em R.C.

Situação	freq. 8%		freq. 10%	
	Perfil a	Perfil b	Perfil a	Perfil b
Segurado com mais de 30 anos, carta há mais de 2, veículo de 1300 cm ³ , morando em Lisboa, na classe 1 do sistema de bonus	12967	13333	16210	16667
idem mas morando em Évora	6743	5600	8429	7000
Apólice referente a uma empresa de Lisboa, veículo com 1600 cm ³ , na classe 1 do sistema de bonus	27556	27840	34447	34801
idem mas na classe 3 do sistema de bonus	32439	32774	40551	40968
idem mas na classe 7 do sistema de bonus	44956	45420	56199	56776
Segurado com 19 anos, carta há menos de 2, veículo de 990 cm ³ , morando em Lisboa que vai entrar no sistema	51212	52657	64019	65822
idem morando em Coimbra	35848	33174	44813	41468
Segurado com mais de 30 anos, carta há mais de 2, veículo de 1300 cm ³ , morando em Lisboa, na classe 15 do sistema de bonus	40632	41778	50793	52284

Como facilmente se deduz do quadro 11.7 a metodologia proposta conduz a uma tarifa que apresenta uma discriminação bastante maior entre os segurados, sendo de sublinhar que, dada a informação disponível seria mais aconselhável recorrer ao perfil α uma vez que os dados que fundamentam a discriminação baseada no valor médio associado às indemnizações apresentam sérias limitações como aliás se referiu no início do presente capítulo.

3. Transição entre diferentes sistemas tarifários

Para além dos problemas inerentes à determinação de um novo sistema tarifário, a implementação de alterações significativas na tarifa também passará necessariamente pela definição de normas que permitam definir os mecanismos de transição entre sistemas.

Se bem que tal problema se situe fora das preocupações do presente trabalho, não se quis deixar de focar alguns aspectos que, pelo seu impacto, podem assumir papel significativo no sucesso das propostas a implementar.

O primeiro ponto a abordar diz claramente respeito ao enquadramento jurídico do mercado, nomeadamente da existência ou não de uma tarifa única. Neste campo parece pacífico recomendar que se dê tanto mais atenção às normas de transição quanto mais competitivo for o mercado, isto é que se acautele tanto quanto possível eventuais efeitos perversos do fenómeno de transição.

Um segundo ponto que também parece pacífico consiste na necessária distinção entre factores *à priori* e sistema de bonus. De facto se existe um critério objectivo para classificar as apólice à luz dos primeiros já as mudanças na avaliação *à posteriori* serão bastante mais problemáticas, sobretudo no caso de se pretender, como acontece geralmente, instituir um sistema com maior número de classes.

No caso que se tem vindo a estudar, a passagem de um sistema incipiente como o que vigora actualmente para um sistema devidamente estruturado não deixará de levantar alguns problemas, o mais importante dos quais será certamente se se deve apenas restringir a informação útil à situação actual no sistema ou se se deve

considerar todos os elementos disponíveis, independentemente de não serem tidos em conta na tarifa actual (nomeadamente o número de anos sem sinistros de que se tenha registo).

Se apenas se pretender recorrer à informação utilizável para efeitos de tarifa, a solução mais simples passaria por efectuar a transição para a classe cujo prémio seja o mais parecido com aquele que vigoraria se não se alterasse o sistema, muito embora se tenha presente a injustiça que tal mecanismo possa impor perante situações que se sabe à priori serem diferentes.

Outro ponto que também parece necessário acautelar, se bem que não se trate propriamente de normas de transição diz respeito ao facto do sistema ser construído no pressuposto que não existem tentativas deliberadas de tirar partido dele, situação que infelizmente está longe de se verificar. Neste quadro pode haver interesse em fixar a classe inicial num valor mais elevado, pese embora a menor prestação do sistema, por forma a evitar que riscos muito penalizados noutra tarifa tenham tendência a deslocar-se para um sistema que lhes permita beneficiar durante um certo tempo de uma tarifa mais baixa, voltando a sair do sistema quando o sistema de bonus os conduzir a agravamentos maiores. Tal processo teria também que compensar os novos segurados que poderiam ver uma descida nas sobrecargas aplicadas aos condutores mais novos ou menos experientes. A este propósito relembre-se o sistema em vigor nos Países Baixos onde a diferenciação etária é feita com base na classe de entrada no sistema de bonus.

Em suma trata-se de sublinhar que, na definição de um sistema tarifário e dos mecanismos de transição que lhe estão associados, a análise e modelização estatística apenas constituem um suporte, porventura indispensável, à tomada de decisões que terão necessariamente de considerar as múltiplas componentes do problema.

Conclusões

Concluir um trabalho desta natureza é sempre tarefa ingrata porque ainda não se dispõe do distanciamento necessário para uma apreciação mais fundamentada do estudo que se foi desenvolvendo ao longo de vários anos. Torna-se no entanto necessário proceder a uma reflexão global para extrair as ideias principais que se foram expondo e sublinhar os contributos dados na resolução do problema proposto.

A formulação teórica do problema

No que se refere aos princípios teóricos que devem nortear a construção dos sistemas tarifários, a primeira conclusão a tirar será simultaneamente a constatação de uma limitação. De facto, se passos importantes foram dados na compatibilização dos mecanismos de avaliação à posteriori com as metodologias de estimação à priori, integrando nomeadamente o sistema de bonus nos modelos lineares generalizados, não restam no entanto dúvidas que ainda não se pode falar de uma verdadeira integração, pelos menos em termos genéricos.

Assim, apenas quando se recorre a um modelo multiplicativo e a um sistema de bonus com escala geométrica é possível uma estimação simultânea dos parâmetros do modelo, problema que se procurará generalizar em trabalhos posteriores. Tenha-se no entanto presente que, mesmo neste caso, alguns elementos do sistema de bonus (número de classes e regras de transição) são determinados de forma exógena ao modelo, muito embora seja sempre possível ensaiar diversas combinações. De qualquer das formas trata-se de uma melhoria significativa face

às metodologias até agora expostas que tratavam os sistemas de bonus de forma completamente separada da estimação dos parâmetros referentes aos factores mensuráveis à priori.

No âmbito da estimação à priori, para além de uma apresentação dos modelos lineares generalizados, é justo realçar o estudo da "deviance" no quadro dos modelos agregados, corrigindo assim algumas imprecisões senão mesmo omissões de *Stroinski* [1987], tendo-se mostrado que, num quadro de hipóteses bastante alargado, a variação entre os desvios observados para modelos idênticos expressos em termos individuais ou agregados depende de uma constante, para a determinação da qual apenas é necessário considerar o nível de agregação utilizado e não as variáveis incluídas no modelo. Tal facto, evitando a necessidade defendida por *Stroinski* de recorrer a valores aproximados¹, permite que se possa desde logo reduzir a dimensão dos problemas de forma muito significativa, já que apenas se terá de lidar com o máximo número de células não vazias originadas pelos factores disponíveis em vez de se ter de considerar o número total de apólices presentes na carteira. No caso abordado neste trabalho, os ganhos consistiram na passagem de cerca de 150000 (ou 30000 quando se trabalha com as duas carteiras simultaneamente) apólices para menos de 300 células, isto é numa diminuição para mais ou menos 2% da dimensão inicial!

Ao nível dos modelos lineares generalizados também se propuseram dois testes estatísticos adicionais para os modelos de Poisson com base numa estrutura constituída unicamente por factores, muito embora a sua aplicabilidade a problemas do tipo daquele que se propôs seja muito discutível, dada a grande aleatoriedade inerente ao fenómeno que dificulta bastante uma opção fundamentada essencialmente na aderência às observações. As potencialidades deste testes parecem mais viradas para modelos de Poisson com taxas médias mais elevadas, situação que, em termos estatísticos, torna a modelização bastante mais fácil, podendo-se então recorrer a estes testes, bastante mais exigentes.

Foi no entanto ao estudo dos sistemas de bonus que se dedicou maior atenção,

¹Muito embora pareça extremamente discutível o recurso à "deviance" para modelos de Poisson com médias de ocorrências tão baixas (veja-se o capítulo 4).

quer por necessitarem de maiores cuidados, dada a sua natureza de avaliadores à posteriori, quer talvez também por motivações mais directamente ligadas com o enquadramento dentro do qual se trabalhou, estando a informação disponível referente aos factores directamente mensuráveis limitada e vigorando um sistema de descontos e agravamentos manifestamente desadequados. É neste contexto que se deve interpretar o longo capítulo dedicado a esta forma de avaliação, tendo-se exposto a filosofia que a suporta bem como os principais desenvolvimentos teóricos que se registaram. Também se teve a preocupação de não só procurar aferir alguns aspectos menos evidentes como também de propor um novo tipo de escala de bonus com variação relativa constante, que se designou por escala geométrica.

O comportamento desta nova escala foi exaustivamente testado, comparando-se o seu comportamento com a escala linear estabelecida por *Gilde & Sundt* [1989] e com a base destas duas extensões, a escala Bayes (*Norberg* [1976] e *Borgan & al* [1981]). Os resultados mostraram que quando se escolhem parâmetros adequados para as escalas de variação constante (linear e geométrica) a sua adequação é praticamente tão boa quanto a da escala óptima (Bayes) sendo no entanto de referir que a escala geométrica é bastante mais sensível a situações muito desadequada em termos das regras de transição a implementar face ao número de classes do sistema. Tal característica não constitui verdadeiramente uma limitação à sua utilização em termos práticos desde que não se queira impor sistemas absurdos.

No domínio teórico, surgem-nos duas linhas de investigação para posteriores desenvolvimentos. A primeira dirá naturalmente respeito a continuar a reflexão sobre as possíveis formas de formular de forma integrada a problemática de construção de sistemas tarifários. Para além deste problema que se apresenta com uma elevada complexidade, também existe outra área bastante interessante, muito embora necessite de um grande volume de informação para o desenvolvimento de qualquer trabalho de índole mais aplicada. Trata-se de considerar o factor tempo nos seus múltiplos efeitos dando-se particular atenção ao seu impacto na deformação da estrutura estimada, alargando-se assim a hipótese desta ser constante no médio prazo.

A aplicação prática

Em termos do trabalho prático que se desenvolveu, a primeira conclusão que se deve tirar consiste nas potencialidades das metodologias apresentadas para a construção de sistemas tarifários que permitam um melhor equilíbrio entre os riscos seguros e os prémios cobrados. Uma vez estabelecidas as regras que devem nortear uma tarifa adequada em termos socio-políticos, abre-se um campo bastante largo onde se deve proceder a uma modelização estatística para fundamentar uma estrutura de discriminação na carteira.

Dos resultados obtidos destacam-se as duas características mais significativas. Por um lado a grande variabilidade dos parâmetros estimados, sublinhando-se os elevados valores obtidos em termos dos desvios-padrões. De facto embora os modelos obtidos não sirvam para efeitos de previsão ou mesmo de formulação mais fundamentada dos diferentes comportamentos, não deixa de ser verdade que a perspectiva dos intervenientes no processo deve ser encarada sobre um prisma algo diferente.

Para a seguradora o grau de discriminação a introduzir apenas se fundamenta numa procura dos melhores riscos, tentando-se oferecer a estes segurados prémios mais atractivos do que os concorrentes (não se esqueça que, se a tarifa se pode considerar livre, o seguro este é obrigatório), sendo o interesse nos piores riscos bastante menor, a menos que o prémio cobrado seja adequado à cobertura de riscos necessariamente acrescidos. Dada uma carteira, apenas interessará à seguradora o volume total de prémios cobrados e de indemnizações pagas, servindo a introdução de um sistema de prémios diferenciados apenas para atrair a melhor carteira possível dentro das potencialidades do mercado.

Assim a oferta de maiores descontos ou agravamentos deverá, numa situação de tarifa livre, ter em atenção as realidades do mercado bem como a estratégia da empresa para quem, em determinado momento, pode ser importante não diminuir de forma sensível a sua carteira por forma a compensar compromissos já contraídos. Num quadro de referência como este, a estimação do sistema mais adequado é no entanto de primordial importância para se poderem diferenciar os pontos que

podem ser manipulados com maior liberdade daqueles onde se está numa situação limite.

No quadro duma tarifa única, já a fixação em definitivo do sistema de bonus, podendo tomar em consideração alguns elementos sociais, não se deverá afastar muito do sistema óptimo por forma a evitar distorções significativas no mercado resultantes da procura pelas diferentes seguradoras de ganhos marginais nas classes mais interessantes do sistema, face à tarifa fixada.

Como se vê, na fixação de tarifas não se procura um modelo explicativo ou previsional mas essencialmente uma situação de transparência do mercado onde a informação oculta não constitua uma forma deliberada de obtenção de mais valias.

O problema da incorporação do factor tempo, sendo uma área de grande interesse para futuros desenvolvimentos teóricos, não pode ser esquecido num estudo prático. De facto a existência de um período de tempo significativo que separa os dados que baseiam a estrutura da tarifa (sobretudo se se envolverem custos diferenciados) do momento da sua aplicação prática leva à necessidade de questionar até que ponto a estrutura estimada se mantém adequada. Para além deste problema existirá sempre a necessidade de previsão de alguns valores para períodos futuros um vez que as apólices são vendidas e portanto tarifadas antes da sua entrada em vigor.

Por fim não se quis deixar de referir que a existência de um maior volume de informação poderia ter beneficiado em muito este estudo, nomeadamente no permitir ensaiar outras metodologias, fundamentadas nomeadamente na teoria da credibilidade.

Também se pode e deve alargar este trabalho a outros aspectos do seguro automóvel muito embora se deva ter presente duas características que podem desempenhar importância assinalável. Por um lado o facto de se abordarem formas de seguro não obrigatório, o que pode levar a uma formulação diferente do problema da construção de tarifas, introduzindo-se de forma explícita os segurados no modelo (ou seja a procura), isto é caminhando na direcção das metodologias baseadas nos conceitos de utilidade esperada, muito embora os problemas inerentes

à aplicação de tais formulações estejam ainda muito longe de terem encontrado uma resposta adequada.

Por outro lado o tratamento dado aos custos associados às indemnizações, sendo o possível, não deixa de apresentar grandes limitações. Seria necessário investigar com bastante mais pormenor a distribuição desta variável, tendo presente que a rápida evolução dos limites mínimos a segurar em responsabilidade civil também podem influenciar o seu comportamento ao longo do tempo.

Bibliografia

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A. [1970], *Handbook of Mathematical Functions*, Abramowitz and Stegun editors, Dover Publications Inc., New York.
- Aitkin, M., Anderson, D., Francis, B. & Hinde, J. [1989] *Statistical Modeling in GLIM*, Oxford Statistical Science Series, Clarendon Press, Oxford.
- Almer, B. [1957] Risk Analysis in Theory and Practical Statistics, *Transactions of the 15th Congress of Actuaries*, 2, pp 314-353.
- Andrade e Silva, J.M. [1991] Modelos Loglineares de Poisson e Estimadores de Ter Berg - Um estudo de Simulação, a ser publicado em *Documento de Trabalho*, CEMAPRE, Lisboa.
- Andrade e Silva, J.M. [1989] An Application of Generalized Linear Models to Portuguese Motor Insurance, *paper presented at the XXIth ASTIN Colloquium*, New York.
- Andrade e Silva, J.M. [1988] Sistemas de bonus/malus no seguro automóvel, *documentos de trabalho n^o97*, CEMAPRE, Lisboa.
- Arrow, K.J. [1953] Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques, *Colloques internationaux du CNRS*, 40, pp 41-48.
- Bailey, R.A. [1963] Insurance Rates with Minimum Bias, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 50, pp 4-11.
- Bailey, R.A. & Simon, L.J. [1960] Two Studies in Automobile Insurance Rate Making, *ASTIN Bulletin*, 1, pp. 192-217.
- Baker, R.J. & Nelder, J.A. [1987] The Theory of Generalised Linear Models, *GLIM User's Guide*, C.D. Payne (ed), London.
- Barndorff-Nielsen, O.E. & Cox, D.R. [1984] Bartlett Adjustments to the Likelihood Ratio Statistic and the Distribution of the Maximum Likelihood Estimator, *International Statistical Review*, 52, pp 309-326.


- Bartlett, M.S. [1937] Properties of Sufficiency and Statistical Test, *Proceeding of Royal Statistical Society, A*, 46, pp 483-495.
- Baxter, L.A., Coutts, S.M. & Ross, G.A.F. [1980] Application of Linear Models in Motor Insurance, *Proceedings of the 21st International Congress of Actuaries*, Zurich, n^o2, pp 11-29.
- Beard, R.E., Pentikänen, T. & Pesonen, E.
[1984], *Risk Theory, The Stochastic Bases of Insurance*, 3rd edition, Chapman and Hall, London.
- Benjamin, B. [1977] *General Insurance*, Heinemann, London.
- Berg P. Ter [1980a] On the Loglinear Poisson and Gamma Model, *ASTIN Bulletin*, 11, n^o1, pp 35-40.
- Berg P. Ter [1980b] Two Pragmatic Approaches to Loglinear Claim Cost Analysis, *ASTIN Bulletin*, 11, n^o2, pp 77-90.
- Bethencourt, F. [1981] Sociedade de seguros projectada em 1770, *Égide*, n^o4, pp 32-34.
- Borch, K. [1985] A Theory of Insurance Premiums, *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, 10, n^o36, pp. 192-208.
- Borch, K. [1984] Equilibrium premiums in an insurance market, *The Journal of Risk and Insurance*, 51, n^o3, pp. 468-476.
- Borch, K. [1974] *The Mathematical Theory of Insurance*, Lexington Books, Massachusetts.
- Borgan, Ø., Hoem, J., & Norberg, R. [1981] A non Asymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp 165-178.
- Box, G. & Cox, D. [1964] An Analysis of Transformations, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 26, pp 211-243.
- Bühlmann, H. [1984] The General Economic Premium Principle, *ASTIN Bulletin*, 14, pp. 13-21.
- Bühlmann, H. [1980] An Economic Premium Principle, *ASTIN Bulletin*, 11, pp. 52-60.
- Bühlmann, H. [1970] *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

- Bühlmann, H. [1969] Experience Rating and Credibility, *ASTIN Bulletin*, 5, pp. 157-165.
- Bühlmann, H. [1968] Experience Rating and Credibility, *ASTIN Bulletin*, 4, pp. 199-207.
- Bühlmann, H. & Jewell, W.S. [1982] Excess Claims and Data Trimming in the Context of Credibility Rating Procedures, *Mitteilungen Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, Heft 1.
- Bühlmann, H. & Straub, E. [1970] Glaubwürdigkeit für Schadensätze, *Mitteilungen Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, Band 70, Heft 1, traduzido por C.F. Brooks com o título "Credibility for Loss Ratios".
- Campbell, M. [1986] An Integrated System for Estimating Risk Premium of Individual Car Models in Motor Insurance, *ASTIN Bulletin*, 16, n^o 2, pp 165-183.
- Chan, F.Y. & Gerber, H. [1985] The reinsurer's monopoly and the Bowley solution, *ASTIN Bulletin*, 15, n^o 2, pp 141-148.
- Chang, L. & Fairley, W. [1979] Pricing Automobile Insurance under Multivariate Classification of Risks: Additive versus Multiplicative, *Journal of Risk and Insurance*, 46, pp 73-96.
- Cordeiro, G.M. [1983] Improved Likelihood Ratio Statistics for Generalized Linear Models, *Journal of Royal Statistical Society, B*, 45, pp 404-413.
- Cordeiro, G.M. & Paula, G.A. [1989] Improved Likelihood Ratio Statistics for Exponential Family non Linear Models, *Journal of Royal Statistical Society, B*, 45, pp 404-413.
- Coutts, S. [1984] Motor Premium Rating, *Insurance: Mathematics and Economics*, n^o3, pp 73-96.
- DuMouchel, W. [1983] The 1982 Massachusetts Auto Insurance Classification Scheme, *The Statistician*, 32, pp 1-13.
- Eeghen, J. van, Greup, E. & Nijssen, [1983] *Rate Making*, survey of Actuarial Studies, n^o2, National-Nederlanden N.V., Rotterdam.
- Eeghen, J. van, Nijssen, J.A. & Ruygt, F.A.M. [1982] Interdependence of Risk Factors: Application of Some Models, *New Motor Rating Structure in the Netherlands*, de Wit (ed), ASTIN Groep Nederland.

- Elsgolts, L. [1978] *Differential Equations and the Calculus of Variations*, MIR publishers, Moscow
- Everitt, B.S. [1977] *The Analysis of Contingency Tables*, Chapman & Hall, London.
- Finney, D.J. [1941] On the Distribution of a Variate whose Logarithm is Normally Distributed, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 7, pp 155-161.
- Franckx, E. [1960] Théorie du Bonus - Conséquences de l'étude de M. le Professeur Fréchet, *Astin Bulletin*, 1, pp 113-122
- Freifelder, L. [1986] Estimation of Classification Factor Relativities: A Modeling Approach, *Journal of Risk and Insurance*, 53, pp 135-143.
- Gilde, V. & Sundt, B. [1989] On Bonus Systems with Credibility Scales, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp 13-22.
- Gerber, H. [1990] The New Bonus-malus System of Switzerland, paper presented at the 21st ASTIN colloquium, Montreux.
- Gerber, H. [1987] Actuarial Applications of Utility Functions, *Actuarial Science*, MacNeil and Umphrey eds, pp 53-61.
- von Geusau, R.A. [1989] The Application of Additive and Multiplicative General Linear Interactive Models (GLIM) in Health Insurance, paper presented at the 21th ASTIN Colloquium, New-York.
- Goovaerts, M.J., de Vylder, F., & Haezendonck, J. [1984] *Insurance Premiums. Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam.
- Gregorius, F. [1982] Development of the Study, *New Motor Rating Structure in the Netherlands*, ASTIN Groep Nederland.
- Gütler, M. [1963] Bonus ou Malus, *Astin Bulletin*, 3, pp 43-61
- Hachemeister, C.A. [1975] Credibility for Regression Models with Application to Trend, in *Credibility : Theory and Applications*, P. Kahn editors, Wiley, New York, pp 129-163.
- Hallin, M. [1977] Etude statistique des facteurs influençant un risque, *Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges*, pp 76-92.
- Hallin, M. & Ingenbleek, J.F. [1981] Etude statistique de la probabilité de sinistre en assurance automobile, *ASTIN Bulletin*, 12, n^o1, pp 41-56.

- Harrington, S. [1986] Estimation and Testing for Functional Form in Pure Premium Regression Models, *ASTIN Bulletin*, 16, pp31-43.
- Harvey, A.C. & Durbin, J. [1986] The Effects of Seat Belt Legislation on British Road Casualties: A Case Study in Structural Time Serie Modelling, *Journal of Royal Statistical Society, A*, 149, Part 3, pp 187-227.
- Henriet, D. & Rochet J-C [1986] La Logique des Systèmes de Bonus-malus en Assurance Automobile: Une Approche Théorique, *Annales d'Economie et de Statistiques*, 1.
- Jee, B. [1989] A Comparative Analysis of Alternative Pure Premium Models in the Automobile Risk Classification System, *Journal of Risk and Insurance*, 54, n^o3, pp 434-459.
- Jewell, W.S. [1975] The Use of Collateral Data in Credibility Theory: A Hierarchical Model, *Research Memo*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxemburg, Austria.
- Jonhson, N.L. & Kotz, S. [1970] *Distributions in Statistics: Continuous Univariate distributions - 1*, Houghton Mifflin Company, Boston.
- Jung, J. [1968] On Automobile Insurance Rate Making, *ASTIN Bulletin*, 5, n^o1, pp 41-48.
- Kahane, Y. [1979] The Theory of Insurance Risk Premiums - A Re-examination in the Light of Recent Developments in Capital Market Theory, *ASTIN Bulletin*, 10, pp 223-239.
- Kendall, M. & Stuart, A. [1979] *The Advanced Theory of Statistics*, Vol 1, Distribution Theory, 4th Edition, Charles Griffin & Co Ltd, London.
- Kimball, S.L. [1985] The Context of "No-Fault", *The Journal of Risk and Insurance*, 52, n^o4, pp. 662-666.
- Klugman, S.A. & Murray, M.L. [1984] Bodily Injury Claim Payments as a Function of Automobile Liability Insurance Limits, *The Journal of Risk and Insurance*, 51, n^o3, pp. 412-432.
- Kochanowski, P.S. & Young M.V. [1985] Deterrent aspects of no-fault automobile insurance: some empirical findings, *The Journal of Risk and Insurance*, 52, n^o2, pp. 269-288.
- van der Laan, R.S. & Hop, J.P. [1989] Probability Distributions for the amount of Damage, paper presented at the 21st ASTIN colloquium, New York.

- Lemaire, J. [1988] A comparative Analysis of Most European and Japanese Bonus-malus Systems, *Journal of Risk and Insurance*, 55, pp 660-681.
- Lemaire, J. [1987] Construction of the New Belgian Motor Third Party Tariff Structure, paper presented at the 20th ASTIN colloquium.
- Lemaire, J. [1985] *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Huebner International Series on Risk, Insurance and Economic Security, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston.
- Loimaranta, K. [1972] Some Asymptotic Properties of Bonus Systems, *ASTIN Bulletin*, 7, pp 233-245
- Loimaranta, K., Jacobsson, J. & Lonka, H. [1980] On the Use of Mixture Models in Clustering Multivariate Frequency Data, *Proceedings of International Congress of Actuaries*, 2, pp 147-161.
- M.A.I [1977] *As Divisões Regionais - Relatório*, serial publicado pela Direcção Geral da Acção Regional, Ministério da Administração Interna, Lisboa.
- McCullagh, P. & Nelder, J.A. [1983] *Generalized Linear Models*, Chapman and Hall, London.
- Murteira, B. [1990] *Probabilidades e Estatística*, vol 2, McGraw-Hill, Lisboa.
- Nelder, J.A. & Wedderburn, R.W. [1972] Generalized Linear Models, *Journal of Royal Statistical Society, A*, 135, pp 370-384.
- Neuhaus, W. [1987] A Bonus-malus System in Automobile Insurance, *Storebrand Actuarial Research Reports*, 8
- Norberg, R. [1979] The Credibility Approach to Experience Rating, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp 181-221.
- Norberg, R. [1976] A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp 92-107.
- Outreville, J.F. & Helie, C. [1986] More Evidence on the Systematic Underwriting Risk in Automobile Insurance, *The Journal of Risk and Insurance*, 53, n^o4, pp. 755-766.
- Pesonen, E. [1962] A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale, *ASTIN Bulletin*, 2, pp 102-108
- Portugal, L. [1985] Os Aumentos dos Capitais Seguros e a Tarifa de R.C. Automóvel, *Associação Portuguesa de Seguros*.



Prins, H.J. [1982] Collection and Processing of Research Data, *New Motor Rating Structure in the Netherlands*, de Wit (ed.), ASTIN-groep, Nederland.

Ratcliff, A.R.N. [1976] Some Market Limitations on the Application of Mathematical Research to Insurance Management, *Proceedings of the 20th International Congress of Actuaries*.

Reis, A.E. dos [1987] *Teoria da Credibilidade - Uma síntese*, Tese de Mestrado em Métodos Matemáticos para Economia e Gestão de Empresas, Instituto Superior de Economia, Lisboa.

Roach, W.L. [1983] Pay-at-the-Pump Automobile Liability Insurance, *The Journal of Risk and Insurance*, 50, n^o1, pp. 131-139.

Rolph, J.E., Hammitt, J.H. & Houchens, R.L. [1985] Automobile accident compensation: Who pays how much how soon ?, *The Journal of Risk and Insurance*, 52, n^o4, pp. 667-685.

Ruygt, F.A.M. [1982] Vehicle Dependent Rating Factors, *New Motor Rating Structure in the Netherlands*, de Wit (ed.), ASTIN-groep, Nederland.

Sant, D. [1980] Estimating Expected Losses in Auto Insurance, *Journal of Risk and Insurance*, 47, pp 133-151.

Santos, J. [1989] Em nível de segurança Portugal é ... exemplo, *Égide*, n^o36, pp 18-24.

Seal, H. [1968] The Use of Multiple Regression in Risk Classification Based on Proportionate Losses, *Proceedings of the 18th International Congress of Actuaries*, pp 659-664.

Soares, A.G. [1980] *Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel*, Livraria Almedina, Coimbra.

Sousa, V.B. [1990] *O Controlo e Fiscalização dos Seguros em Portugal, Séculos XIV a XVIII*, Edição do Instituto de Seguros de Portugal, Lisboa.

Stroinski, K [1987] *Generalized Linear Models in Motor Insurance*, Ph. D. Thesis, Heriot-Watt University, Edimburgh.

Sture, S. [1987] A credibility Approach to Geographical Subdivision in Automobile Insurance, *Actuarial Research Report*, n^o6, Storebrand.

Sundt, B. [1988] Credibility Estimators with Geometric Weights, *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, pp 113-122.

- Sundt, B. [1987] Two Credibility Regression Approaches for the Classification of Passenger Cars in a Multiplicative Tariff, *Astin Bulletin*, 17, n^o1, pp 41-70.
- Thyrion, P. [1960] Contribution à l'étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile, *Astin Bulletin*, 1, pp 142-162
- Tomberlin, T.J. [1988] Predicting Accident Frequencies for Drivers Classified by Two Factors, *Journal of the American Statistical Association*, 83, n^o402, pp 309-321.
- Tomé, F.M. [1989] *Modelos de Previsão para Séries Cronológicas*, Tese de Mestrado em Métodos Matemáticos para Economia e Gestão de Empresas, Instituto Superior de Economia, Lisboa.
- Ventura, P. [1990] *Legislação sobre Seguros e Actividade Seguradora*, Livraria Almedina, Coimbra.
- Wedderburn, R.W.N.M. [1976] On the Existence and Uniqueness of the Maximum Likelihood for Certain Generalized Linear Models, *Biometrika*, 63, pp 439-447.
- de Wit, G.W. (ed.) [1982] *New Motor Rating Structure in the Netherlands: Statistical and Market Aspects. Report of the Study*, ASTIN-Groep, Nederland.
- de Wit, G.W., & van Eeghen, J. [1983] Rate Making and Society's Sense of Fairness, paper apresentado ao coloquio *Insurance Premiums*, Luvaina.
- Witt, R.C. & Urrutia, J. [1983] A Comparative Economic Analysis of Tort Liability and No-Fault Compensation Systems in Automobile Insurance, *The Journal of Risk and Insurance*, 50, n^o4, pp. 631-669.
- Zador, P. & Lund, A. [1986] Re-Analyses of the Effects of No-Fault Auto Insurance on Fatal Crashes, *The Journal of Risk and Insurance*, 53, n^o2, pp. 226-257.